Ergänzung

Kurven

- Darstellungsweisen
- Steigung von Kurven
- Implizite Funktionen
- Bogenlänge
- Felder
- Kurvenintegrale
- Wegunabhängigkeit

Funktionen und Kurven

Wir haben schon zahlreiche Funktionen kennengelernt:
z.B. Parabeln (etwa $f(x) = x^2$) oder trigonometrische Funktionen (z.B. $f(x) = \sin x$).

Aber schon ein einfacher Kreis lässt sich nicht als eine Funktion darstellen: (z.B. Kreis um Nullpunkt mit Radius 1: $x^2 + y^2 = 1$).

Auflösen nach y liefert nämlich: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

Eine andere Möglichkeit ist hier die Darstellung:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & \sin t \end{array} \right\},$$

mit $t \in [0, 2\pi]$ bzw.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Darstellung von ebenen Kurven

Ebene Kurven lassen sich oft auf verschiedene Arten darstellen:

- **implizite Darstellung:** $F(x, y) = 0$
- **explizite Darstellung:** $y = f(x)$
- **Parameterdarstellung:** $x = x(t)$, $y = y(t)$ **mit** $t \in [a, b]$.

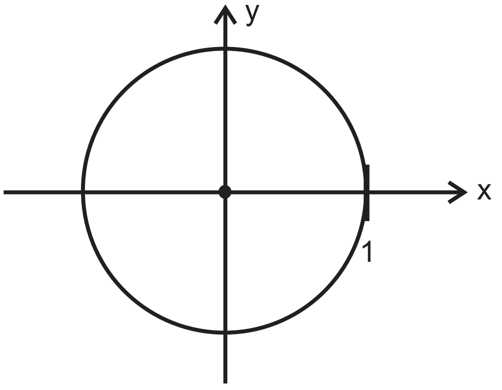
Beispiel

Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1

- *implizit:* $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

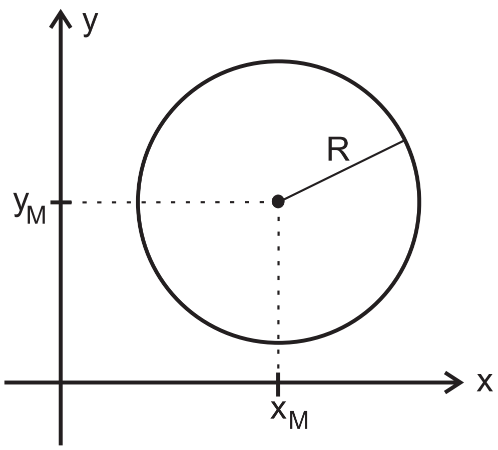
- *explizit:*
  $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *oder*
  $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

- *Parameterdarstellung:*
  $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$
  mit $t \in [0, 2\pi]$



Übung

Beschreiben Sie auf mehrere Arten einen Kreis vom Radius R um den Mittelpunkt (x_M, y_M).



Lösung

Kreis um den Punkt (x_M, y_M) *mit Radius* R

- *implizit:*
  $F(x,y) = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - R^2 = 0$

- *explizit:*
  $y = f_1(x) = y_M + \sqrt{R^2 - (x - x_M)^2}$ *oder*
  $y = f_2(x) = y_M - \sqrt{R^2 - (x - x_M)^2}$

- *Parameterdarstellung:*
  $x(t) = x_M + R\cos t$,
  $y(t) = y_M + R\sin t$
  mit $t \in [0, 2\pi]$

Übung

Gegeben sei eine Kurve in Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= x(t) = 1 - \tfrac{1}{2}\cos^2 t, \\ y &= y(t) = 3\cos t. \end{aligned}$$

Geben Sie die Kurve in impliziter Darstellung an!

Lösung

Wegen

$$\begin{aligned} x &= x(t) &= 1 - \tfrac{1}{2}\cos^2 t, \\ y &= y(t) &= 3\cos t \end{aligned}$$

gilt

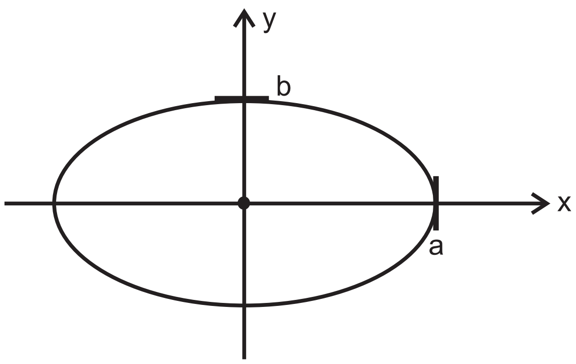
$$x = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 t = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 - \frac{y^2}{18}.$$

Also:

$$F(x, y) = x + \frac{y^2}{18} - 1 = 0.$$

Weitere Beispiele:
Parameterdarstellung von Ellipsen

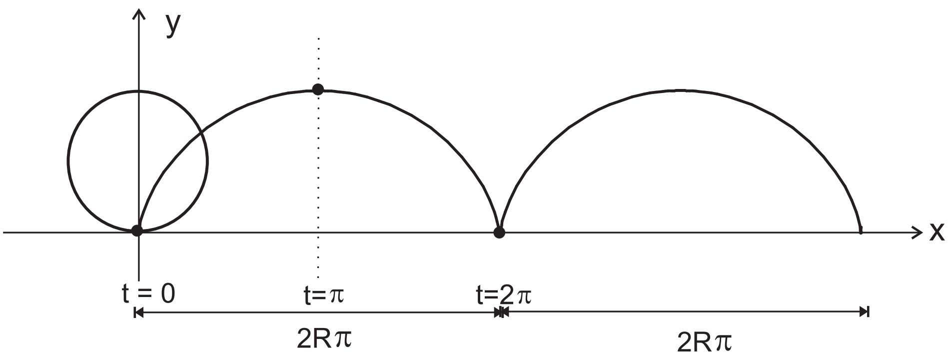
Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Weitere Beispiele:
Parameterdarstellung von Zykloiden

Zykloide:
(Abrollen eines Kreises auf einer Linie)

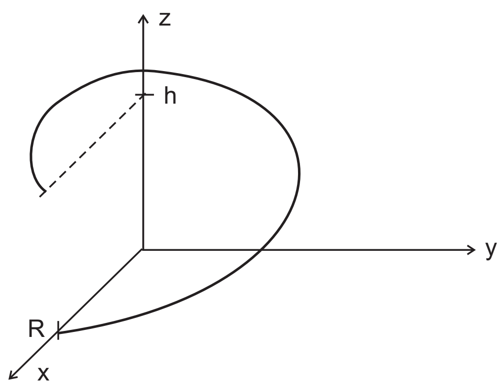


$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot (t - \sin t) \\ R \cdot (1 - \cos t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Weitere Beispiele:
Parameterdarstellung von Kurven 3D

Bisher haben wir ebene Probleme besprochen. Kurven können aber natürlich auch im Raum liegen:

Schraubenlinie:
(Radius R, Ganghöhe h)



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ \frac{h}{2\pi}t \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Kurven in Polarform

Manche Kurven lassen sich am einfachsten in **Polarkoordinaten** (vgl. komplexe Zahlen) beschreiben. Anstelle von

$$\begin{aligned} x(t) &= \dots \\ y(t) &= \dots \end{aligned}$$

wird hier der Abstand in Abhängigkeit vom jeweiligen Winkel angegeben:

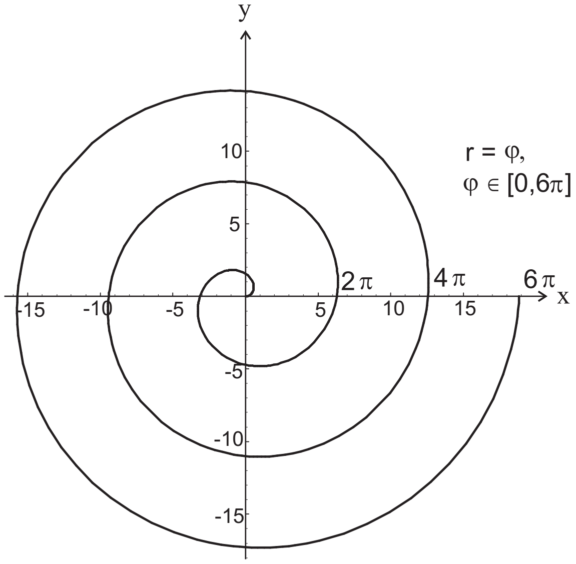
$$r(\varphi) = \dots$$

Beispiel

Eine Archimedische Spirale wird in Polarform angegeben:

$$r = r(\varphi) = a \cdot \varphi.$$

Eine Archimedische Spirale erhält man z.B. durch das Aufrollen eines Teppichs oder in der Rille einer Schallplatte. Schaut man eine Haushaltsrolle oder Toilettenpapier von der Seite an, so sieht man ebenfalls eine Archimedische Spirale.



Umrechnung von Polarform in Parameterdarstellung

Eine in Polarkoordinaten dargestellte Kurve mit der Gleichung $\boldsymbol{r = r(\varphi)}$ lautet in Parameterform

$$\boldsymbol{\begin{aligned} x(\varphi) &= r(\varphi) \cdot \cos\varphi \\ y(\varphi) &= r(\varphi) \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

Beispiel:

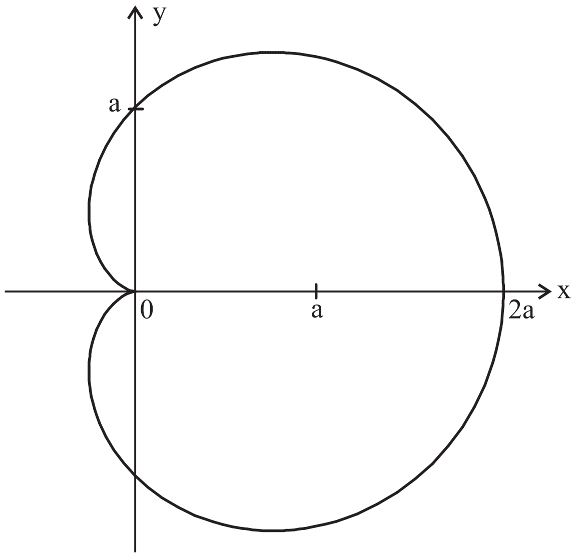
Die Archimedische Spirale $r(\varphi) = 3\varphi$ lautet in Parameterform

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= 3\varphi \cdot \cos\varphi \\ y(\varphi) &= 3\varphi \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

Übung

Wie lautet die Parameterform der Kardioide?

$$r(\varphi) = a \cdot (1 + \cos\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$



Lösung

Die Parameterform der Kardioide

$$r(\varphi) = a \cdot (1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

lautet

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= a \cdot (1 + \cos\varphi) \cdot \cos\varphi, \\ y(\varphi) &= a \cdot (1 + \cos\varphi) \cdot \sin\varphi. \end{aligned}$$

Bahnkurven, Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung

Wird eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ mit der Zeit t durchlaufen, so bezeichnet $\dot{\vec{r}}(t)$ die Momentangeschwindigkeit und $\ddot{\vec{r}}(t)$ die Momentanbeschleunigung. Die Ableitung der Vektoren erfolgt komponentenweise.

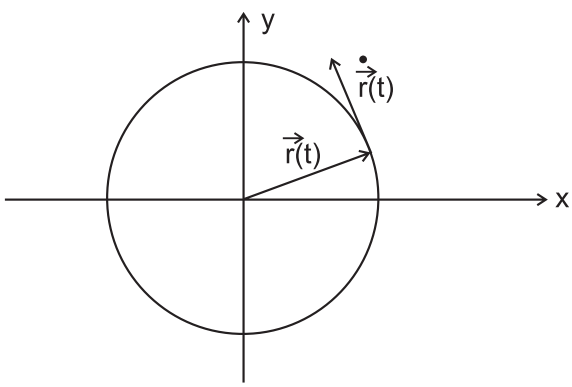
Beispiel

Bahnkurve, Momentangeschwingikeit und Momentanbeschleunigung eines Kreises vom Radius R um den Nullpunkt lauten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix},$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\cos t \\ -R\sin t \end{pmatrix}.$$



Übung

Geben Sie Bahnkurve, Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung einer Zykloide an.

Lösung

Bahnkurve, Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung einer Zykloide lauten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \sin t \end{pmatrix},$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}.$$

Ableitung einer Kurve in Parameterdarstellung

Für die Ableitung einer Kurve in Parameterdarstellung erhalten wir:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

und

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\, y' = \frac{d}{dt}(y') \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) \cdot \frac{1}{\dot{x}}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}}$$

Ableitung einer Kurve in Parameterdarstellung

Für die Ableitung einer Kurve in Parameterdarstellung gilt:

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

und

$$y''(x) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}.$$

Beispiel

Für die Ableitung eines Kreises erhalten wir:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, &= \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix},\end{aligned}$$

also

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\textit{cot}\ t.$$

Etwa:

$$\begin{aligned}&\textit{Für } t = 0: \quad y' = \ -\textit{cot}\ 0 \ = \infty. \\ &\textit{Für } t = \tfrac{\pi}{4}: \quad y' = \ -\textit{cot}\ \tfrac{\pi}{4} \ = -1. \\ &\textit{Für } t = \tfrac{\pi}{2}: \quad y' = \ -\textit{cot}\ \tfrac{\pi}{2} \ = 0.\end{aligned}$$

Beispiel

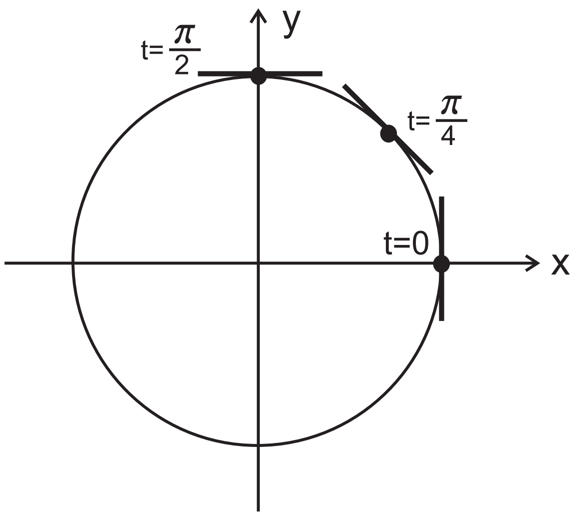
Für die Ableitung eines Kreises haben wir erhalten:

$$\text{Für } t = 0: \quad y' = \; -\cot 0 \; = \infty.$$

$$\text{Für } t = \tfrac{\pi}{4}: \quad y' = \; -\cot \tfrac{\pi}{4} \; = -1.$$

$$\text{Für } t = \tfrac{\pi}{2}: \quad y' = \; -\cot \tfrac{\pi}{2} \; = 0.$$

Damit:



Übung

Geben Sie die Steigung einer Zykloide für $t_0 = 0$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$ *und* $t_0 = \pi$ *an.*

Lösung

Für die Ableitung einer Zykloide erhalten wir:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t-\sin t) \\ R(1-\cos t) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1-\cos t) \\ R\sin t \end{pmatrix},$$

also

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{R\sin t}{R(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

Damit:

Für $t = 0: \quad y' = \frac{\sin 0}{1-\cos 0} = \infty.$

Für $t = \frac{\pi}{4}: \quad y' = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}} \approx 2{,}41421.$

Für $t = \pi: \quad y' = \frac{\sin\pi}{1-\cos\pi} = 0.$

Lösung

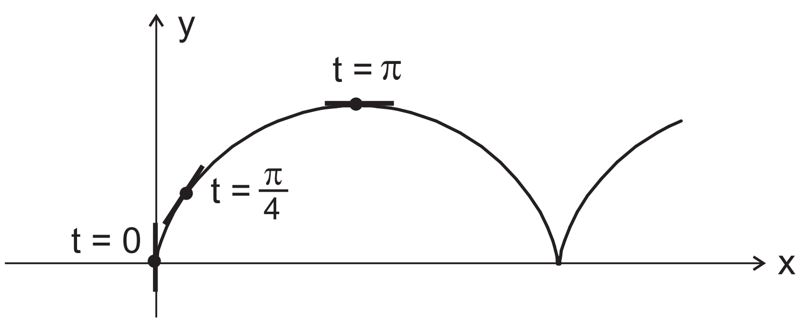
Für die Ableitung einer Zykloide haben wir erhalten:

Für $t = 0: \quad y' = \dfrac{\sin 0}{1 - \cos 0} = \infty.$

Für $t = \frac{\pi}{4}: \quad y' = \dfrac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 - \cos \frac{\pi}{4}} = \dfrac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} \approx 2{,}41421.$

Für $t = \pi: \quad y' = \dfrac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = 0.$

Damit:



Horizontale und vertikale Tangenten

Oft interessiert man sich für horizontale (waagerechte) bzw. für vertikale (senkrechte) Tangenten. Bei horizontalen Tangenten muss die Ableitung y' gleich Null werden. Dies gilt, wenn im Bruch $y' = \dot{y}/\dot{x}$ der Zähler gleich Null (und der Nenner ungleich Null) ist.

Für Kurven in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ liegen
- **bei $\dot{x} \neq 0$ und $\dot{y} = 0$ horizontale Tangenten,**
- **bei $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} \neq 0$ vertikale Tangenten vor.**

Der Fall bei $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ ist gesondert zu untersuchen (Grenzwertsatz von L'Hospital!).

Gleichung der Tangenten

Die Gleichung der Tangenten an eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 lautet:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Ist die Kurve in der Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ gegeben, so erhalten wir:

$$y(t) = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \cdot (x(t) - x(t_0))$$

bzw.

$$\frac{y - y(t_0)}{x - x(t_0)} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \quad .$$

Gleichung der Tangenten

Die Gleichung der Tangenten an eine Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $t = t_0$ lautet:

$$\frac{y - y(t_0)}{x - x(t_0)} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \quad .$$

Beispiel

Die Tangentengleichung

$$\frac{y-y(t_0)}{x-x(t_0)}=\frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

lautet für einen Kreis:

$$\frac{y-R\sin t_0}{x-R\cos t_0}=\frac{R\cos t_0}{-R\sin t_0}=-\cot t_0.$$

Für $t_0=\frac{\pi}{4}$ *ergibt sich:*

$$\frac{y-R\sin\frac{\pi}{4}}{x-R\cos\frac{\pi}{4}}=-\cot\frac{\pi}{4},$$

also

$$\frac{y-R\frac{1}{\sqrt{2}}}{x-R\frac{1}{\sqrt{2}}}=-1 \quad \textit{bzw.} \quad y=-x+\sqrt{2}R.$$

Übung

Geben Sie die Tangentengleichung einer Zykloide an für $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Lösung

Die Tangentengleichung

$$\frac{y - y(t_0)}{x - x(t_0)} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$$

lautet für eine Zykloide:

$$\frac{y - R(1 - \cos t_0)}{x - R(t_0 - \sin t_0)} = \frac{R \sin t_0}{R(1 - \cos t_0)}.$$

Für $t_0 = \frac{\pi}{4}$ *ergibt sich:*

$$\frac{y - R(1 - \cos \frac{\pi}{4})}{x - R(\frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4})} = \frac{R \sin \frac{\pi}{4}}{R(1 - \cos \frac{\pi}{4})}.$$

Wegen $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *erhalten wir:*

$$y = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} x - R \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + 2R.$$

Implizite Funktionen

Nicht immer lässt sich eine Kurve aus der impliziten Form

$$F(x, y) = 0$$

nach y in die explizite Form auflösen.

Aber auch ohne diese Möglichkeit der Auflösbarkeit erhält man (Differenzierbarkeit vorausgesetzt) durch Anwendung der (mehrdimensionalen) Kettenregel auf $0 = F(x, y)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt} F(x(t), y(t)) \\ &= \tfrac{dF}{dx} \cdot \tfrac{dx}{dt} + \tfrac{dF}{dy} \cdot \tfrac{dy}{dt} \\ &= F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} \end{aligned}$$

und somit

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Satz über implizite Funktionen

Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Der Punkt (x_0, y_0) gehöre zur Kurve $F(x, y) = 0$ und es gelte $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann lässt sich die Kurve lokal eindeutig um (x_0, y_0) durch eine Funktion darstellen. Für die Steigung dieser Funktion im Punkt (x_0, y_0) gilt:

$$y'\big|_{(x_0,y_0)} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Beispiel

Wir betrachten den Einheitskreis

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

mit $F_x = 2x$, $F_y = 2y$.

Es gilt $F_y = 0$ *für* $y = 0$, *d.h. für die beiden Punkte* $(1,0)$ *und* $(-1,0)$. *An diesen beiden Punkten kann man den Kreis nicht lokal durch eine Funktion beschreiben (anschaulich gesprochen erhielte man zwei Funktionen, den oberen und den unteren Halbkreis).*

Die Steigung einer Kreiskurve berechnet sich zu

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

An speziellen Punkten erhalten wir:

Für $(x_0, y_0) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) : \quad y' = -\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -1.$

Für $(x_0, y_0) = (0, 1) : \quad y' = -0/1 = 0.$

Bogenlänge

Die Bogenlänge s einer Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ nähern wir an durch Aufsummieren kleiner Geradenstücke in Richtung des Tangentenvektors

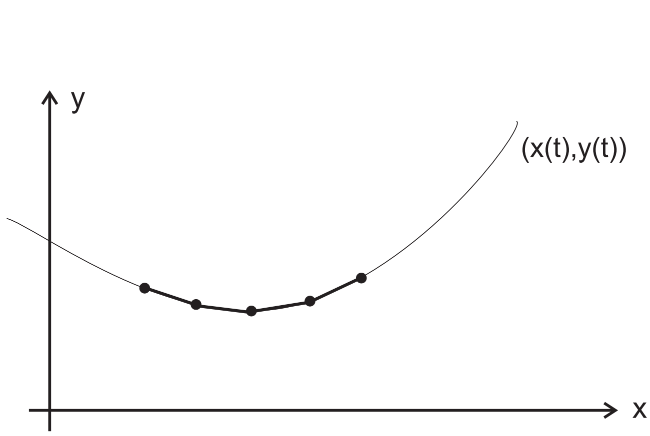
$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t))^T$$

mit dem Betrag

$$||\dot{\vec{r}}(t)|| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Durch Aufsummieren und Grenzübergang erhält man

$$s := \int_{t=a}^{b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ dt.$$



Bogenlänge

Die Bogenlänge s einer Kurve in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$ von $t = a$ bis $t = b$ berechnet sich zu

$$s = \int_{t=a}^{b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Beispiel

Für Bahnkurve und Momentangeschwindigkeit eines Kreises vom Radius R um den Nullpunkt haben wir erhalten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix},$$

Für die Bogenlänge des Viertelkreises folgt damit:

$$s = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} R\, dt = R \cdot t\big|_{t=0}^{\pi/2} = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Übung

Berechnen Sie die Bogenlänge einer Zykloide von $t = 0$ bis $t = \pi$.

Lösung

Für Bahnkurve und Momentangeschwindigkeit einer Zykloide haben wir erhalten:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \sin t \end{pmatrix}.$$

Für die Bogenlänge der Zykloide von $t = 0$ bis $t = \pi$ folgt damit:

$$s = \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t}\, dt$$

$$= R \cdot \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$= R \cdot \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt.$$

Fortsetzung der Lösung

Für die Bogenlänge der Zykloide von $t = 0$ bis $t = \pi$ hatten wir erhalten:

$$s = \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = R \cdot \int_{t=0}^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt.$$

Wegen $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$ im angegebenen Intervall ist

$$s = 2R \cdot \int_{t=0}^{\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\, dt$$

$$= -4R\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=0}^{\pi} = 4R.$$

Bogenlänge einer Funktion

Ist eine Kurve in der Form $y = f(x)$ gegeben, so können wir sie in die Parameterdarstellung $x = t$, $y = f(t)$ umschreiben. Damit erhalten wir für die Bogenlänge von $t = a$ bis $t = b$:

$$s = \int_{t=a}^{b} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Bogenlänge einer Funktion

Die Bogenlänge s einer Funktion $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ berechnet sich zu

$$s = \int_{x=a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Beispiel

Für die Bogenlänge der Parabel $y(x) = x^2$ *von* $x = 0$ *bis* $x = 2$ *erhalten wir:*

$$s = \int_{x=0}^{2} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx.$$

Dieses Integral kann durch Substitution mit $2x = \sinh u$ *gelöst werden (oder durch Nachschlagen in einer Formelsammlung). Man erhält:*

$$\int \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = 2 \int \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}\, dx$$

$$= x \sqrt{\frac{1}{4} + x^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(2x)$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen liefert:

$$s = 2 \sqrt{\frac{1}{4} + 2^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(4) \approx 4,64678$$

Beispiele für Felder

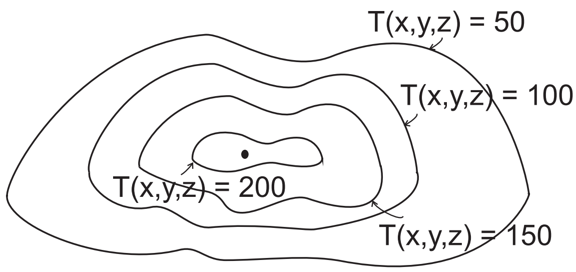
Felder dienen insbesondere der Beschreibung physikalischer Größen:

- Skalarfelder
  z.B. die Temperaturverteilung $T(x, y, z)$ im Raum

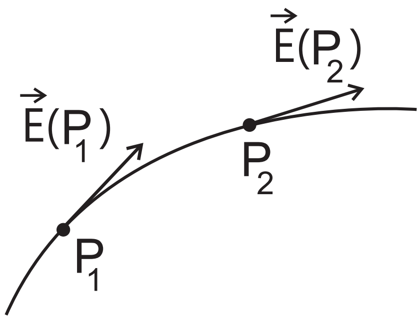
- Vektorfelder
  z.B. die elektrische Feldstärke $\vec{E}(x, y)$ auf der Ebene

Veranschaulichung von Feldern

- Skalarfelder
  z.B. Niveaulinien (Äquipotentiallinien)



- Vektorfelder
  z.B. Feldlinien



Definition Kurvenintegral

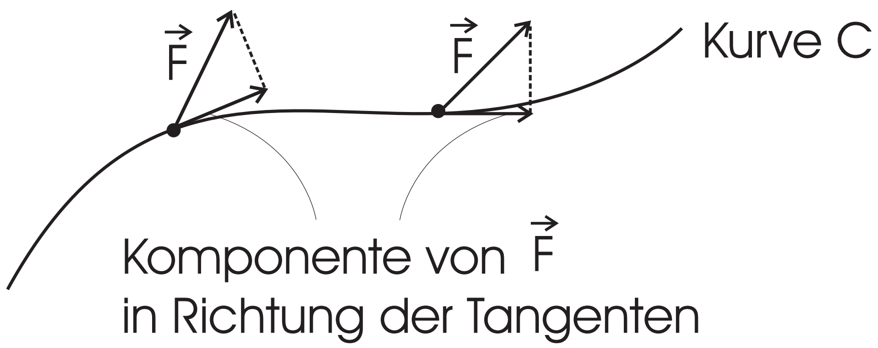
Ein Kurvenintegral beschreibt physikalisch z.B. die Arbeit, die entlang eines Weges verrichtet wird:

Unter einem Kurvenintegral (Linienintegral, Wegintegral) eines Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang einer stetig differenzierbaren Kurve C beschrieben durch den Integrationsweg $\vec{r}(t)$ versteht man das Integral

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} := \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \; dt.$$

Anschaulich bedeutet dies, dass nur über die Komponente von $\vec{F}$ in Richtung des Weges (der Kurve C) integriert wird:

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} := \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\; dt.$$

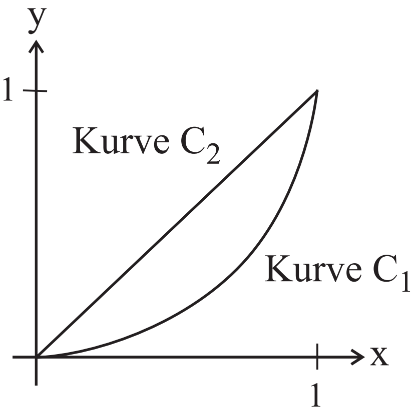


Voraussetzungen: Gebiete etc.

Dabei wollen wir im Folgenden immer voraussetzen, dass das Vektorfeld $\vec{F}$ auf einem *Gebiet* (d.h. einer offenen und zusammenhängenden Menge) definiert und stetig ist und dass auch die betrachtete Kurve C (d.h. der Integrationsweg $\vec{r}(t)$) in diesem Gebiet liegen soll und stetig differenzierbar ist.

Beispiel für Berechnung eines Kurvenintegral

Wir betrachten die Kurve C_1:



Diese Kurve läßt sich mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

parametrisieren. Für den Tangentenvektor an diese Kurve ergibt sich dann

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Gegeben sei weiterhin das Feld $\vec{F}$ mit:

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^y \\ 2xy^2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst die Komponenten des Feldes $\vec{F}$ entlang der Kurve C_1:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} t \cdot e^{t^2} \\ 2 \cdot t \cdot (t^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{t^2} \\ 2t^5 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für das Kurvenintegral:

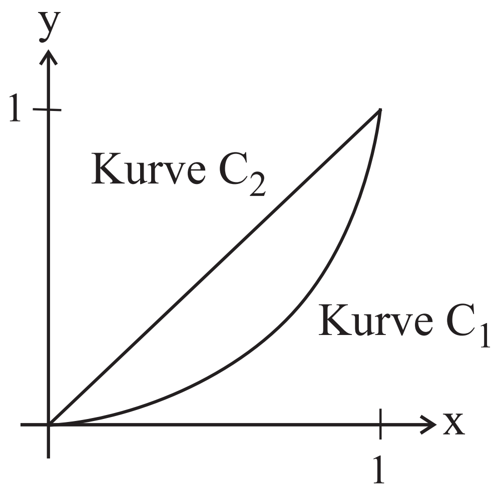
$$\begin{aligned}
&\int_C \vec{F} d\vec{r} := \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\ dt \\
&= \int_0^1 \left((te^{t^2}) \cdot 1 + (2t^5) \cdot 2t\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(te^{t^2} + 4t^6\right) dt \\
&= \left(\tfrac{1}{2}e^{t^2} + \tfrac{4}{7}t^7\right)\Big|_{t=0}^{1} = \left(\tfrac{1}{2}e^1 + \tfrac{4}{7}\right) - \left(\tfrac{1}{2}e^0\right) \\
&= \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{14} \\
&\approx 1.43057.
\end{aligned}$$

Übung

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ *für das gleiche Feld*

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^y \\ 2xy^2 \end{pmatrix}$$

nun über Kurve C_2*:*



Lösung

Die Kurve C_2 lässt sich mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

parametrisieren. Für den Tangentenvektor an diese Kurve ergibt sich dann

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Die Komponenten des Feldes $\vec{F}$ entlang der Kurve C_2 berechnen sich zu:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} te^t \\ 2t^3 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für das Kurvenintegral:

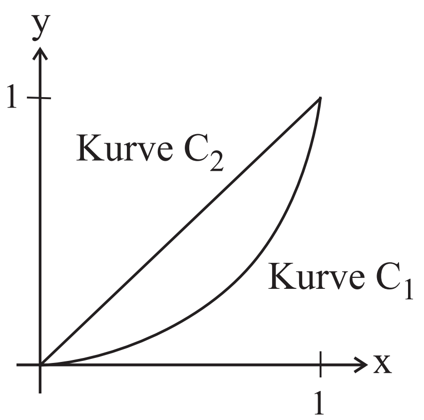
$$\begin{aligned} &\textstyle\int_C \vec{F} d\vec{r} := \int_0^1 \Big((te^t) \cdot 1 + (2t^3) \cdot 1\Big)\, dt \\ &= \textstyle\int_0^1 \Big(te^t + 2t^3\Big)\, dt \\ &= \Big((t-1)e^t + \tfrac{1}{2}t^4\Big)\Big|_{t=0}^{1} = \tfrac{1}{2} - (-1) = 1.5. \end{aligned}$$

Wegabhängigkeit des Kurvenintegrals

Es fällt auf, dass für die Kurvenintegrale $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ für das gleiche Feld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^y \\ 2xy^2 \end{pmatrix}$$

verschiedene Werte ermittelt wurden, je nachdem über welche Kurve C_1 oder C_2 integriert wurde:



Im Allgemeinen sind also Kurvenintegrale wegabhängig!

Beispiel für wegunabhängiges Kurvenintegral

Wir wollen im Folgenden das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ für das Feld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y^3 \\ -6xy^2 \end{pmatrix}$$

untersuchen.

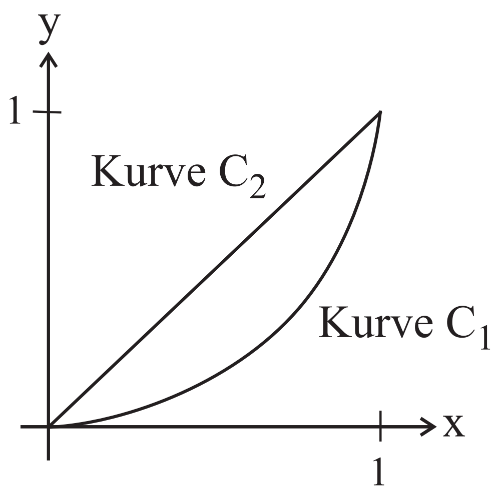
Wir werden feststellen, dass der Wert des Kurvenintegrals unabhängig vom gewählten Weg (Kurve C_1 bzw. Kurve C_2) ist.

Übung

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ *für das Feld*

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y^3 \\ -6xy^2 \end{pmatrix}$$

einmal über Kurve C_1 *und einmal über Kurve* C_2*:*



Lösung

Für die Kurve C_1 erhält man:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Die Komponenten des Feldes $\vec{F}$ entlang der Kurve C_1 berechnen sich zu:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 6t - 2t^6 \\ -6t^5 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für das Kurvenintegral:

$$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} := \int_0^1 \Big((6t - 2t^6) \cdot 1 + (-6t^5) \cdot 2t\Big)\, dt$$
$$= \int_0^1 \Big(6t - 14t^6\Big)\, dt = \Big(3t^2 - 2t^7\Big)\Big|_{t=0}^{1}$$
$$= 3 - 2 = 1.$$

Lösung

Für die Kurve C_2 erhält man:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Die Komponenten des Feldes $\vec{F}$ entlang der Kurve C_2 berechnen sich zu:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} 6t - 2t^3 \\ -6t^3 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für das Kurvenintegral:

$$\begin{aligned}
&\int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} := \int_0^1 \Big((6t - 2t^3) \cdot 1 + (-6t^3) \cdot 1\Big)\, dt \\
&= \int_0^1 \left(6t - 8t^3\right) dt = \left(3t^2 - 2t^4\right)\Big|_{t=0}^{1} \\
&= 3 - 2 = 1.
\end{aligned}$$

Wir wollen im Folgenden untersuchen, warum das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$

für das Feld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y^3 \\ -6xy^2 \end{pmatrix}$$

unabhängig vom gewählten Weg (Kurve C_1 bzw. Kurve C_2) ist,

für das Feld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^y \\ 2xy^2 \end{pmatrix}$$

jedoch vom gewählten Weg (Kurve C_1 bzw. Kurve C_2) abhängt.

Kurvenintegrale längs geschlossener Wege

Anstelle der Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen kann man auch untersuchen, ob ein Kurvenintegral längs eines *geschlossenen* Weges den Wert Null hat. (Für Kurvenintegrale längs geschlossener Wege benutzt man das Symbol $\oint$.)

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- **Das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ ist auf einem Gebiet wegunabhängig, d.h. es hängt nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve C ab.**
- **Das Kurvenintegral $\oint \vec{F} d\vec{r}$ längs jedes geschlossenen Weges hat den Wert Null.**

Kurvenintegrale längs geschlossener Wege

Der Zusammenhang liegt auf der Hand: Man kann die beiden unterschiedlichen Kurven C_1 und C_2 zu einem geschlossenen Weg C_1 und $-C_2$ (Kurve C_2 in entgegengesetzter Richtung durchlaufen) zusammensetzen und es gilt:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1 - C_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Wir kommen nun auf die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen zurück. Dazu treffen wir die Annahme:

$$\vec{F} d\vec{r} \stackrel{!}{=} d\Phi.$$

Dann gilt

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r} \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} d\Phi = \Phi(t)\big|_{t=t_1}^{t_2} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

d.h. das Kurvenintegral ist nur noch vom Wert von Φ am Endpunkt ($t = t_2$) und am Anfangspunkt ($t = t_1$) des Weges abhängig.

Dazu muss ein derartiges Φ existieren, anders ausgedrückt:

$$\vec{F} d\vec{r} = \underbrace{F_1(x,y)}_{=\frac{\partial \Phi}{\partial x}} dx + \underbrace{F_2(x,y)}_{=\frac{\partial \Phi}{\partial y}} dy = d\Phi$$

oder

$$\vec{F} = \text{ grad } \Phi.$$

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen, Gradientenfeld

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- **Das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ ist auf einem Gebiet wegunabhängig.**
- **Das Feld $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Stammfunktion Φ mit**

$$\vec{F} = \text{grad } \Phi.$$

Das Kurvenintegral berechnet sich dann über

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \Phi(\text{Endpunkt}) - \Phi(\text{Anfangspunkt}).$$

Man spricht in der Physik bei Gradientenfeldern auch von konservativen Vektorfeldern, die zugehörige Stammfunktion heisst Potential.

Beispiel für die Ermittlung eines Potentials

Zum Feld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y^3 \\ -6xy^2 \end{pmatrix}$$

lässt sich ein Potential finden.

Wegen $\Phi_x = F_1$ und $\Phi_y = F_2$ folgt durch Integration

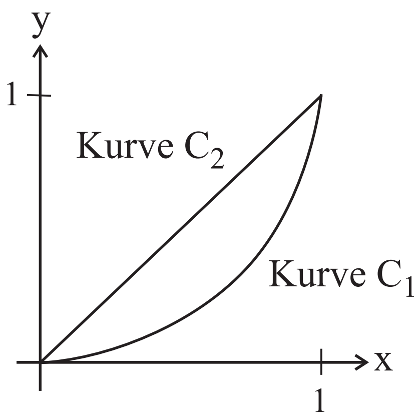
$$\begin{array}{lllll} \Phi & = & \int(6x-2y^3)dx & = & 3x^2 - 2xy^3 + a(y), \\ \Phi & = & \int(-6xy^2)dy & = & -2xy^3 + b(x). \end{array}$$

Vergleich der beiden Ausdrücke liefert

$$\Phi(x,y) = 3x^2 - 2xy^3 + c,$$

wobei man der Einfachheit halber die Konstante c wie bei Stammfunktionen meist weglässt.

Für einen beliebigen Weg vom Anfangspunkt $(0, 0)$ zum Endpunkt $(1, 1)$, z.B. für die Wege C_1 oder C_2,



erhält man zum Feld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y^3 \\ -6xy^2 \end{pmatrix}$$

mit dem Potential

$$\Phi(x, y) = 3x^2 - 2xy^3$$

für das Kurvenintegral

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \Phi(1, 1) - \Phi(0, 0) = (3-2) - (0-0) = 1.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob es ein einfaches Kriterium gibt, dass ein derartiges Gradientenfeld vorliegt. Eine notwendige Bedingung ist dabei die folgende: Falls $\vec{F} = (F_1, F_2)^T = \operatorname{grad} \Phi$, also

$$F_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

so müssen auch die gemischten Ableitungen übereinstimmen (Satz von Schwarz)

$$\Phi_{xy} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \Phi_{yx} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

Gleichsetzen liefert die so genannte Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Integrabilitätsbedingung

Es gilt sogar

Notwendig für die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ für das Feld $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$ ist die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Bei so genannten einfach-zusammenhängenden Gebieten und stetig differenzierbaren Feldern $\vec{F}$ ist die Integrabilitätsbedingung sogar hinreichend.

Beispiel für Integrabilitätsbedingung

Wir betrachten das Feld:

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 2y^3 \\ -6xy^2 \end{pmatrix}.$$

Die Integrabilitätsbedingung gilt wegen:

$$\begin{aligned} (F_1)_y &= (6x - 2y^3)_y = -6y^2, \\ (F_2)_x &= (-6xy^2)_x = -6y^2, \end{aligned}$$

also $(F_1)_y = (F_2)_x$.

Es liegt ein Potentialfeld vor:

$$\vec{F} = \text{grad}\ \Phi \quad \text{mit} \quad \Phi = 3x^2 - 2xy^3.$$

Übung

Überprüfen Sie für die folgenden Felder $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$ *die Integrabilitätsbedingung* $(F_1)_y = (F_2)_x$ *und geben Sie gegebenenfalls ein Potential* Φ *an:*

- $\vec{F}(x,y) = (F_1, F_2)^T = \left(xe^y, 2xy^2\right)^T$,

- $\vec{F}(x,y) = (F_1, F_2)^T$
  $= \left(-e^{-x} - 6x \cos y, 3x^2 \sin y + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)^T$.

Lösung

- *Nachprüfen der Integrabilitätsbedingung führt auf $(F_1)_y = xe^y$ und $(F_2)_x = 2y^2$; die Integrabilitätsbedingung ist also nicht erfüllt und es existiert kein Potential.*

- *Nachprüfen der Integrabilitätsbedingung führt auf $(F_1)_y = (F_2)_x = 6x \sin y$. Das Potential kann durch Integration bestimmt werden:*

$$\begin{aligned}\Phi &= \int(-e^{-x} - 6x\cos y)dx \\ &= e^{-x} - 3x^2 \cos y + a(y),\end{aligned}$$

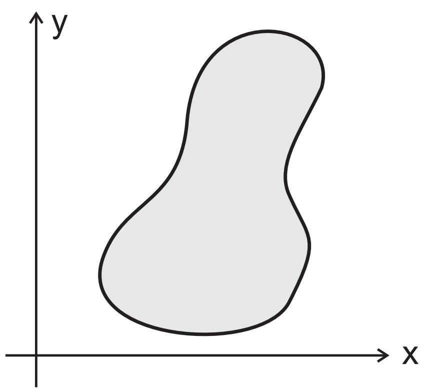
$$\begin{aligned}\Phi &= \int(3x^2 \sin y + \tfrac{y}{\sqrt{1+y^2}})dy \\ &= -3x^2 \cos y + \sqrt{1+y^2} + b(x),\end{aligned}$$

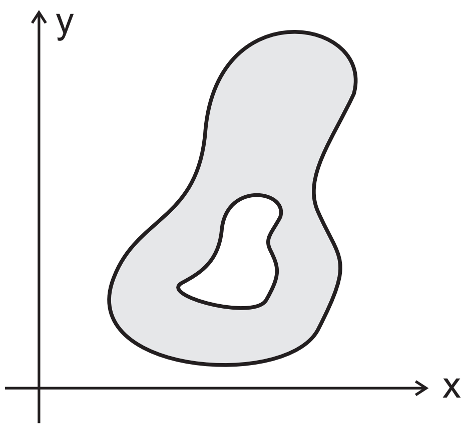
also $\Phi = e^{-x} - 3x^2 \cos y + \sqrt{1+y^2}$.

Einfach zusammenhängende Gebiete

Im Folgenden soll die Bedeutung des Ausdrucks „einfach zusammenhängend“ erläutert werden.

In der Ebene ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet anschaulich gesprochen ein Gebiet ohne Loch.





Nicht einfach zusammenhängende Gebiete

Wir diskutieren zum Abschluss ein Vektorfeld, welches die Integrabilitätsbedingung in einem *nicht* einfach zusammenhängendem Gebiet erfüllt. Hier ist die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals *nicht* gegeben bzw. das Kurvenintegral über einen geschlossenen Weg ist ungleich Null.

Wir betrachten im Folgenden das Vektorfeld des magnetischen Wirbels

$$\vec{F}(x,y) = (F_1, F_2) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

Die Integritabilitätsbedingung ist erfüllt mit

$$(F_1)_y = (F_2)_x = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad .$$

Allerdings ist das Vektorfeld $\vec{F}$ nur auf $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ definiert, das zugrunde liegende Gebiet ist also nicht einfach zusammenhängend.

Wir zeigen: Das Kurvenintegral über den (geschlossenen) Einheitskreis ist ungleich Null!

Wählt man als geschlossene Kurve den Einheitskreis

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

so ergeben sich wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ für die Komponenten des Feldes $\vec{F}$ entlang des Einheitskreises:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t = 1.$$

Das Kurvenintegral ist ungleich Null:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_C \vec{F} d\vec{r} &= \textstyle\int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} 1 dt = t|_{t=0}^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Kurven im Raum

Auch bei Kurven im Raum wird das Kurvenintegral entsprechend definiert. Nur die Integrabilitätsbedingung ist bei Kurven im Raum etwas aufwändiger:

Die folgenden Aussagen sind bei einfach zusammenhängenden Gebieten und Stetigkeit der partiellen Ableitungen von $\vec{F}$ äquivalent:

- **Das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ ist auf einem Gebiet wegunabhängig, d.h. es hängt nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve C ab.**
- **Für das Feld $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ gilt:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial y}. \end{aligned}$$