

Beitrag zur geometrischen Synthese von Verzahnungen

Dipl.-Ing. Isajs Kans-Kagans

Riga, Lettland

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Zech

Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg

Abstract

In der umfangreichen Literatur (siehe beispielsweise das Literaturverzeichnis in Kap. 8), die der Geometrie der Verzahnungen gewidmet ist, sind konkrete Beispiele geometrischer Synthese von Verzahnungen kaum zu finden. Und wenn auch, dann nur für ebene Verzahnungen, d.h. für zylindrische Zahnräder mit gleichlaufenden Achsen. Damit wird aber die Vielfalt der verwendeten Verzahnungen bei weitem nicht erschöpft. Dieser Mangel an Beispielen ist durchaus nicht zufällig. Sowohl seine Gründe, als auch die Wege zu deren Beseitigung werden in der vorliegenden Abhandlung gezeigt.

Ein neuer Ansatz zur Lösung des Problems der Synthese von Verzahnungen wird dargestellt. Der grundsätzliche Unterschied des vorgeschlagenen Verfahrens von den zur Zeit bekannten besteht im völligen Verzicht auf jede Verwendung von Hüllkurven und Hüllflächen. Der Grund dazu ist, dass das oben erwähnte Problem nichts gemein hat mit der Ermittlung von Hüllkurven oder Hüllflächen.

Dadurch wird das hier dargestellte Verfahren universell anwendbar für die geometrische Berechnung von Zahnrädern mit Gerad- und Schrägverzahnung und parallelen Achsen.

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	4
2.	Grundgleichungen für schrägverzahnte Räder	4
3.	Fourierentwicklungen für den Polarwinkel und den Polarradius eines Zahnprofils.....	11
4.	Ein Beispiel der Anwendung des allgemeinen Verfahrens	23
5.	Grundgleichungen für geradverzahnte Räder.....	31
6.	Über die geometrische Bedeutung der in vorigen Kapiteln abgeleiteten Gleichungen.....	39
7.	Nochmals über den Fall des kreisevolventigen Zahnprofils.....	42
8.	Literaturverzeichnis.....	45

1. Einleitung

Das Ziel des vorliegenden Werks ist die Entwicklung eines neuen Ansatzes zur Lösung des Problems der geometrischen Synthese von Verzahnungen. Der grundsätzliche Unterschied des vorgeschlagenen Verfahrens von den zur Zeit bekannten besteht in völligem Verzicht auf jede Verwendung von Hüllkurven und Hüllflächen. Der Grund dazu ist, dass das oben erwähnte Problem nichts gemein mit der Ermittlung von sowohl Hüllkurven als auch Hüllflächen hat.

Um uns diese Tatsache klarzumachen, betrachten wir das Problem der geometrischen Synthese einer Verzahnung zweier Schraubenzahnräder mit gleichlaufenden Achsen. Die Oberfläche jedes dieser Zahnräder soll eine Schar Schraubenlinien darstellen, die alle einen gemeinsamen Schraubengang haben, entweder alle mit Links- oder alle mit Rechtswindung sind und auf einer Schar koaxialen Drehzylinder verteilt sind.

Den Fall zweier zylindrischen Oberflächen, die als entartete (mit unendlichem Schraubengang) Schraubenflächen gedeutet werden können, betrachten wir später.

Das Problem der geometrischen Synthese einer beliebigen Verzahnung lässt sich folgendermaßen formulieren. Es gebe zwei Koordinatensysteme, von denen jedes einem dritten System gegenüber, das als fixiertes gilt, sich in bestimmter Weise bewegen kann. Dementsprechend sind einige gewisse gegenseitige Anordnungen der verschiebbaren Systeme möglich. Eine gewisse Teilmenge dieser Anordnungen werden als zulässige bezeichnet. Den Rest der Menge der möglichen Anordnungen bilden die unzulässigen Anordnungen. Ein Paar Oberflächen, von denen jede an eines der verschiebbaren Systeme starr gebunden ist, bildet eine Verzahnung genau dann, wenn die Oberflächen sich in keiner der zulässigen Anordnungen schneiden, aber sie schneiden sich in jeder unzulässigen Anordnung.

In der Regel besteht das Problem in der Ermittlung einer Oberfläche, die zusammen mit einer gegebenen Oberfläche die erforderliche Verzahnung bildet. Es ist damit gemeint, dass die oben erwähnten Mengen der zulässigen, bzw. unzulässigen gegenseitigen Anordnungen der Koordinatensysteme gegeben sind und die gesuchte Oberfläche die definierten Anforderungen erfüllen muss. Unter diesen Voraussetzungen kann die gesuchte Oberfläche i.a. nicht eindeutig bestimmt werden. Deshalb sind zusätzliche Angaben notwendig. Im betrachteten Fall sei eine gewisse Schraubenfläche gegeben und die allgemeinen Voraussetzungen durch die Annahme ergänzt, dass eine rechte bzw. linke Schraubenfläche mit einem im Voraus gegebenen Schraubengang zu ermitteln ist.

Merken wir uns jetzt, dass eine beliebige Drehung einer Schraubenfläche um ihre Achse einer entsprechenden Parallelverschiebung der Schraubenfläche längs der Achse äquivalent ist. Die Parallelverschiebung ist der Drehung direkt proportional. Das bedeutet, dass die Drehungen der eine Verzahnung bildenden Schraubenzahnräder äquivalent sind den Parallelverschiebungen dieser Räder längs ihren Achsen. Im Falle gleichlaufender Achsen müssen also die Parallelverschiebungen der beiden Räder immer ein- und dieselbe Geschwindigkeit haben, denn sonst schneiden sich die Schraubenflächen in zulässigen gegenseitigen Anordnungen oder sie schneiden sich in unzulässigen gegenseitigen Anordnungen nicht. Mit anderen Worten bleiben die beiden Schraubenflächen gegeneinander unbeweglich. Es gibt nur eine einzige zulässige gegenseitige Anordnung der beiden Schraubenflächen. Deshalb gibt es keine Oberflächenscharen und es hat keinen Sinn irgendwelche Hüllflächen oder Hüllkurven zu ermitteln.

2. Grundgleichungen für schrägverzahnte Räder

In diesem Kapitel werden die für die Lösung des oben erwähnten Problems notwendigen Gleichungen abgeleitet.

Nehmen wir an, dass eine Schraubenfläche in einem kartesischen Rechtssystem $Oxyz$ durch ihre Gleichungen

$$\begin{cases} x = \rho(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) \\ y = \rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) \\ z = z \end{cases} \quad (2.1)$$

definiert ist. In (2.1) sind ζ und z zwei unabhängige Parameter.

Wenn der durch ζ bezeichnete Winkel traditionell im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers gemessen wird, entsprechen den positiven T -Werten Schraubenflächen mit Rechtswindung, den negativen T -Werten aber Schraubenflächen mit Linkswindung.

Die Funktion $\rho = \rho(\zeta)$, die eine geschlossene Kurve beschreibt, ist jedenfalls periodisch. Es sei n die größte ganze Zahl, für die die Identität $\rho(\zeta) \equiv \rho\left(\zeta + \frac{2\pi}{n}\right)$ gilt. Dann ist $\frac{2\pi}{n}$ der kleinste der Winkel mit der Eigenschaft, dass das Ergebnis jeder Drehung der Schraubenfläche (2.1) um die Oz Achse um einen beliebigen dieser Winkel dieselbe Schraubenfläche (2.1) ist. Andererseits entspricht einer Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ eine Verschiebung der Schraubenfläche (2.1) um $\pm \frac{T}{n}$ Einheiten längs der Oz Achse. Es ist dem Betrag nach die kleinste der Verschiebungen, die die Schraubenfläche (2.1) auf sich selbst abbilden. Nehmen wir jetzt die Schraubenfläche (2.1) als gegebene an.

Die gesuchte Schraubenfläche sei durch ihre Gleichungen

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1(\zeta_1) \cos\left(\zeta_1 + \frac{2\pi}{T_1} z_1\right) \\ y_1 = \rho_1(\zeta_1) \sin\left(\zeta_1 + \frac{2\pi}{T_1} z_1\right) \\ z_1 = z_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

im kartesischen Rechtssystem $O_1x_1y_1z_1$ definiert, wobei

$$\begin{cases} x_1 = x - L \\ y_1 = y \\ z_1 = z \end{cases} \quad (2.3)$$

Hier sind ζ_1 und z_1 wieder unabhängige Parameter. Der Winkel ζ_1 wird im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers gemessen.

Nehmen wir jetzt an, dass jeder Drehung der Schraubenfläche (2.1) um die Oz Achse um einen Winkel φ eine Drehung der Schraubenfläche (2.2) um die O_1z_1 Achse um einen gewissen Winkel $k\varphi$ mit konstantem (von φ unabhängigem) Faktor k entsprechen soll. Dabei sollen die zwei Schraubenflächen gegenseitig unbeweglich bleiben, d.h. längs ihren Achsen gleich verschoben werden. Daher folgt, dass die die Verzahnung bildenden Schraubenzahnräder im Falle gleicher Vorzeichen der Größen T und T_1 (wenn also die beiden Schraubenflächen Rechts- bzw. Linksschrauben sind) in derselben Richtung rotieren müssen. Andernfalls müssen die Schraubenzahnräder in entgegengesetzten Richtungen rotieren.

Nun sei n_1 die größte ganze Zahl, für die die Identität $\rho_1(\zeta_1) \equiv \rho_1\left(\zeta_1 + \frac{2\pi}{n_1}\right)$ gilt. Solch eine Zahl existiert immer,

da die Funktion $\rho_1(\zeta_1)$ periodisch sein muss. Dann ist $\pm \frac{T_1}{n_1}$ dem Betrag nach die kleinste der Verschiebungen der Schraubenfläche (2.2) längs der O_1z_1 Achse, die diese Schraubenfläche auf sich selbst abbilden.

Da die Schraubenflächen (2.1) und (2.2) eine Verzahnung bilden, d.h. gegenseitig unbeweglich bleiben sollen, müssen die Gleichheiten

$$\left|\frac{T}{n}\right| = \left|\frac{T_1}{n_1}\right| \Rightarrow \left|\frac{T}{T_1}\right| = \left|\frac{n}{n_1}\right| \quad (2.4)$$

stattfinden. Außerdem muss die Gleichheit

$$\frac{T\varphi}{2\pi} = \frac{T_1 k \varphi}{2\pi} \quad (2.5)$$

bei allen φ gelten.

Aus den Beziehungen (2.4) und (2.5) folgt

$$|k| = \left| \frac{T}{T_1} \right| = \left| \frac{n}{n_1} \right| \quad (2.6)$$

Da n und n_1 nichts anderes als die Zähnezahlen der den Schraubenflächen (2.1) und (2.2) entsprechenden Schraubenzahnräder sind, heißt (2.6), dass die Übersetzung einer Verzahnung bis auf das Vorzeichen mit dem Verhältnis der Zähnezahlen übereinstimmt. Das ist freilich eine längst bekannte Tatsache.

Die Schraubenfläche (2.2) muss eine Schar von Schraubenlinien darstellen, deren gemeinsame Achse die Achse $O_1 z_1$ sein soll, die alle denselben Schraubengang T_1 haben und entweder alle mit Rechtswindung oder alle mit Linkswindung sein müssen. Dabei soll mindestens eine dieser Schraubenlinien die Schraubenfläche (2.1) berühren, aber keine von denen darf diese Schraubenfläche schneiden.

Berührt irgendeine Linie die Schraubenfläche (2.1) im Punkt $M_0(\zeta_0, z_0)$, so liegt die Tangente an die betrachtete Linie zum Punkt M_0 in der Tangentialebene an die Schraubenfläche (2.1) zum Punkt M_0 . Diese Tangentialebene wird eindeutig durch zwei ihr gehörende nichtkollineare Vektoren bestimmt. Wir wählen für diesen Zweck die Vektoren $\left\{ \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z} \right\}$ und $\left\{ \frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right\}$ aus, wobei die partiellen Ableitungen im Punkt M_0 zu nehmen sind.

Aus den Gleichungen (2.1) folgt

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \zeta} = \rho'(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) - \rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \rho'(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) + \rho(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) \\ \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) \\ \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Hieraus ergeben sich zwei nichtkollineare Vektoren, die die Tangentialebene zum Punkt M_0 der Schraubenfläche (2.1) bestimmen, und zwar

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) - \rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \\ \rho'(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) + \rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \\ 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2\pi}{T} \rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \\ \frac{2\pi}{T} \rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \\ 1 \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

Berührt eine der die Schraubenfläche (2.2) bildenden Schraubenlinien im Punkt $M_0(\zeta_0, z_0)$ die Schraubenfläche (2.1), so ist ein Richtungsvektor \vec{r} der Tangente an diese Schraubenlinie zum Punkt M_0 zu zwei Vektoren (2.9) komplanar, d.h. das Spatprodukt dieser drei Vektoren ist Null. Wir ermitteln jetzt die Ausdrücke für die Koordinaten des oben erwähnten Vektors \vec{r} .

Der Radius r_0 des Drehzylinders, auf dem die Schraubenlinie, die der die Schraubenfläche (2.2) bildenden Schar gehört und durch den Punkt M_0 geht, liegt, ist der Entfernung des Punkts M_0 von der Achse O_1z_1 gleich, nämlich

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{\left[L - \rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \right]^2 + \left[\rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \right]^2} = \\ &= \sqrt{L^2 + \rho^2(\zeta_0) - 2L\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Den Anstieg ϑ der entsprechenden Schraubenlinie ermittelt man aus der Beziehung

$$\tan \vartheta = \frac{T_1}{2\pi r_0} = \frac{T_1}{2\pi \sqrt{L^2 + \rho^2(\zeta_0) - 2L\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right)}}, \quad (2.11)$$

woher folgt

$$\cos \vartheta = \frac{2\pi \sqrt{L^2 + \rho^2(\zeta_0) - 2L\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right)}}{\sqrt{4\pi^2 \left[L^2 + \rho^2(\zeta_0) - 2L\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \right] + T_1^2}} \quad (2.12)$$

$$\sin \vartheta = \frac{T_1}{\sqrt{4\pi^2 \left[L^2 + \rho^2(\zeta_0) - 2L\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \right] + T_1^2}} \quad (2.13)$$

Die Koordinaten des Punkts M_0 im Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ erhält man, indem man in den Gleichungen (2.2) $\rho_1(\zeta_1)$ durch r_0 , z_1 durch z_0 und den Ausdruck $\zeta_1 + \frac{2\pi}{T_1} z_1$ durch den Winkel (für eine Außenverzahnung)

$$\zeta_{10} = \arctan \frac{\rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right)}{\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) - L} + \pi \quad (2.14)$$

ersetzt.

Es ergibt sich aus (2.14)

$$\cos \zeta_{10} = \frac{\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) - L}{\sqrt{L^2 + \rho^2(\zeta_0) - 2L\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right)}} \quad (2.15)$$

$$\sin \zeta_{10} = \frac{\rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right)}{\sqrt{L^2 + \rho^2(\zeta_0) - 2L\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right)}} \quad (2.16)$$

Der Vektor \vec{r} ist dem Vektor $\{-\cos\vartheta \sin\zeta_{10}, \cos\vartheta \cos\zeta_{10}, \sin\vartheta\}$ kollinear. Man kann deshalb annehmen, dass

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2\pi \rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \\ 2\pi \left[\rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) - L \right] \\ T_1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Die Bedingung der Komplanarität der Vektoren (2.9) und des Vektors \vec{r} lässt sich nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{vmatrix} \rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) & \rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) & \rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) - \rho'(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \\ \rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) - L & \rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) & \rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) + \rho'(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \\ \frac{T_1}{2\pi} & \frac{T}{2\pi} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.18)$$

Nach einfachen Umformungen kommt man von der Gleichung (2.18) zur Gleichung

$$\frac{T_1 - T}{T} \rho'(\zeta_0) \rho(\zeta_0) + L \left[\rho'(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) - \rho(\zeta_0) \sin\left(\zeta_0 + \frac{2\pi}{T} z_0\right) \right] = 0 \quad (2.19)$$

Anmerkung: Man achte auf die Vorzeichen der Größen T und T_1 !

Ersetzt man in (2.19) ζ_0 und z_0 durch entsprechende laufende Werte dieser Parameter, so erhält man die Gleichung

$$\frac{T_1 - T}{T} \rho'(\zeta) \rho(\zeta) + L \left[\rho'(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) - \rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) \right] = 0 \quad (2.20)$$

Die Gleichung (2.20) beschreibt die Menge der Punkte, in denen die Schraubenfläche (2.2) die Schraubenfläche (2.1) berühren kann.¹ Aus der Gleichung (2.20) kann z ausgedrückt werden, und zwar

¹ Die Berührung muss aber nicht unbedingt in allen Punkten der durch die Gleichung (2.20) beschriebenen Menge stattfinden.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) - \frac{\rho'(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) = \\
 & = \frac{T_1 - T}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \rho'(\zeta) \rho(\zeta) \\
 & \sin\left[\zeta + \frac{2\pi}{T} z - \operatorname{arctg} \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right] = \frac{T_1 - T}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \rho'(\zeta) \rho(\zeta) \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.21) ist genau dann lösbar, wenn die Ungleichheit

$$\left| \frac{T_1 - T}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \rho'(\zeta) \rho(\zeta) \right| \leq 1 \quad (2.22)$$

erfüllt ist. Ist (2.22) erfüllt, so ergibt sich aus (2.21)

$$z = \frac{T}{2\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{T_1 - T}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \rho'(\zeta) \rho(\zeta) \right] + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta \right\}$$

Für den Wert ζ_0 des Parameters ζ sei ein ihm entsprechender Wert z_0 des Parameters z gefunden. Dann berühren sich im Punkt $M_0(\zeta_0, z_0)$ die Schraubenfläche (2.1) und die Schraubenlinie, deren Gleichungen im Koordinatensystem $O_1 x_1 y_1 z_1$

$$\begin{cases} x_1 = r_0 \cos \zeta_1 \\ y_1 = r_0 \sin \zeta_1 \\ z_1 = \frac{T_1}{2\pi} (\zeta_1 - \zeta_{10}) + z_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

sind.

In den Gleichungen (2.23) muss r_0 durch den rechten Teil der Formel (2.10), ζ_{10} aber durch den rechten Teil der Formel (2.14) ersetzt sein, wobei in beiden Fällen die entsprechenden Werte der Parameter ζ_0 und z_0 substituiert sein sollen. Die Größe ζ_1 in den Gleichungen (2.23) ist ein unabhängiger Parameter.

Um zu ermitteln, ob die Schraubenlinie (2.23) die Schraubenfläche (2.1) schneidet, formen wir die Gleichungen (2.23) so um, dass z_1 den unabhängigen Parameter darstellt:

$$\begin{cases} x_1 = r_0 \cos \left[\frac{2\pi}{T_1} (z_1 - z_0) + \zeta_{10} \right] \\ y_1 = r_0 \sin \left[\frac{2\pi}{T_1} (z_1 - z_0) + \zeta_{10} \right] \\ z_1 = z_1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Alle übrigen Bezeichnungen behalten ihren früheren Sinn. Wenn die Schraubenlinie (2.24) die Schraubenfläche (2.1) schneidet, ergeben sich die Koordinaten der Durchstoßpunkte aus dem Gleichungssystem, wobei auf die Vorzeichen der Größen T und T_1 geachtet werden soll:

$$\begin{cases} \rho(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) = r_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T_1}(z - z_0) + \zeta_{10}\right] + L \\ \rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z\right) = r_0 \sin\left[\frac{2\pi}{T_1}(z - z_0) + \zeta_{10}\right] \end{cases} \quad (2.25)$$

Erhebt man sowohl die rechten als auch die linken Teile der Gleichungen (2.25) ins Quadrat und addiert anschließend die Gleichungen miteinander, so erhält man die Beziehung

$$[\rho(\zeta)]^2 = r_0^2 + L^2 + 2Lr_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T_1}(z - z_0) + \zeta_{10}\right],$$

woraus folgt

$$z = \frac{T_1}{2\pi} \left\{ \arccos \frac{[\rho(\zeta)]^2 - r_0^2 - L^2}{2Lr_0} - \zeta_{10} \right\} + z_0.$$

Substituiert man jetzt den rechten Teil dieser Beziehung in die zweite der Gleichungen (2.25), so erhält man die Gleichung

$$\rho(\zeta) \cos\left\{ \zeta + \frac{T_1}{T} \left[\arccos \frac{[\rho(\zeta)]^2 - r_0^2 - L^2}{2Lr_0} - \zeta_{10} \right] + \frac{2\pi}{T} z_0 \right\} = \frac{[\rho(\zeta)]^2 - r_0^2 + L^2}{2L} \quad (2.26)$$

bezüglich ζ . Besitzt diese Gleichung einige Wurzeln im Bereich $0 < \zeta < 2\pi$, so schneidet die Schraubenlinie (2.23) die Schraubenfläche (2.1) und muss deshalb als untaugliche erkannt werden. Andernfalls darf die Schraubenlinie (2.23) in die Schar die Schraubenfläche (2.2) bildenden Schraubenlinien eingeschlossen sein. Das Problem, ob sich die Schraubenflächen (2.1) und (2.2) in jeder unzulässigen gegenseitigen Anordnung schneiden, kann erst dann gelöst werden, wenn alle tauglichen Schraubenlinien gefunden worden sind. Dies ist darauf zurück zu führen, dass wenn in einer der unzulässigen gegenseitigen Anordnungen die Schraubenlinie (2.23) die Schraubenfläche (2.1) nicht schneidet, so kann dies doch für eine andere der die Schraubenfläche (2.2) bildenden Schraubenlinien der Fall sein. Es wird aber nicht gefordert, dass in jeder unzulässigen gegenseitigen Anordnung alle die Schraubenfläche (2.2) bildenden Schraubenlinien die Schraubenfläche (2.1) schneiden.

Wir nehmen an, dass N taugliche Schraubenlinien ermittelt und durch entsprechende Gleichungssysteme ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{cases} x_1 = r_{0i} \cos\left[\frac{2\pi}{T_1}(z_1 - z_{0i}) + \zeta_{10i}\right] \\ y_1 = r_{0i} \sin\left[\frac{2\pi}{T_1}(z_1 - z_{0i}) + \zeta_{10i}\right] \\ z_1 = z_1 \end{cases} \quad (2.27)$$

definiert sind. Nimmt man in allen diesen Systemen für den Parameter z_1 einen und denselben Wert, so erhält man die Koordinaten N Punkte eines Stirnquerschnitts der Schraubenfläche (2.2). Geht man von den Gleichungssystemen ($i = 1, 2, \dots, N$)

$$\begin{cases} x_1 = r_{0i} \cos \zeta_1 \\ y_1 = r_{0i} \sin \zeta_1 \\ z_1 = \frac{T_1}{2\pi} (\zeta_1 - \zeta_{10i}) + z_{0i} \end{cases} \quad (2.28)$$

mit dem Parameter ζ_1 aus und nimmt man in allen Systemen einen und denselben Wert für diesen Parameter, so erhält man die Koordinaten N Punkte eines Axialquerschnitts der Schraubenfläche (2.2).

Es ist glaubenswert, dass bei einer genügend großen Zahl N die Schraubenfläche (2.2) mittels dieser Punkte mit hinreichender Genauigkeit wiederaufgebaut sein kann. Eine wesentliche Anmerkung soll hinzugefügt sein: die Menge der gefundenen Schraubenlinien kann durch eine beliebige Menge von Schraubenlinien ergänzt werden, von denen jede alle an die die Schraubenfläche (2.2) bildenden Schraubenlinien gestellten Forderungen erfüllt, aber keine die Schraubenfläche (2.1) schneidet. Die Bedeutung dieser Anmerkung liegt darin, dass eben diese zusätzlichen Schraubenlinien die Schraubenfläche (2.1) möglicherweise in jenen unzulässigen gegenseitigen Anordnungen schneiden, in denen die anderen Schraubenlinien sie nicht schneiden können.

3. Fourierentwicklungen für den Polarwinkel und den Polarradius eines Zahnprofils

Die zweite wesentliche Besonderheit dieses Werks rührt von der Vermutung her, dass Fourierreihen das am besten für analytische Beschreibung der Geometrie eines Zahnrades geeignete, wie von der Natur selbst dafür erschaffene Mittel sind. Nämlich mittels einer Fourierentwicklung kann das ganze Profil des Zahnrades beschrieben werden. Diese Möglichkeit behalten wir fernerhin stets im Auge. Eben Fourierentwicklungen sollen am meisten die im vorigen Abschnitt als $\rho(\zeta)$ bzw. $\rho_1(\zeta_1)$ bezeichneten Funktionen darstellen.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Fourierentwicklung für das Profil einer Zahnstange. Dabei soll das Profil eines Zahnes eine Symmetrieachse haben. Wird der Koordinatenursprung auf einer dieser Symmetrieachsen gewählt, so stellt das Profil der Zahnstange das Bild einer geraden periodischen Funktion dar, deren Fourierreihe die Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (3.1)$$

hat.

Im allgemeinen Falle soll eine solche Funktion die Periode T haben und durch die Ausdrücke

$$f(x) = \begin{cases} H & , \text{ wenn } 0 \leq x < a \text{ ist} \\ H - \frac{H-h}{b-a}(x-a) & , \text{ wenn } a \leq x < b \text{ ist} \\ h & , \text{ wenn } b \leq x < \frac{T}{2} \text{ ist} \end{cases} \quad (3.2)$$

definiert sein. So gilt für die Fourierkoeffizienten

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{4}{T} \left[Hb - \frac{H-h}{b-a} \int_a^b (x-a) dx + h \left(\frac{T}{2} - b \right) \right] = \frac{4}{T} \left[Hb - \frac{H-h}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} + h \left(\frac{T}{2} - b \right) \right] = \\
 &= \frac{4}{T} \frac{2Hb - Hb + hb + Ha - ha + hT - 2hb}{2} = \frac{4}{T} \frac{(H-h)(a+b) + hT}{2} = \frac{2}{T} [(H-h)(a+b) + hT]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx = \\
 &= \frac{4}{T} \left[H \int_0^a \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx + \frac{Hb-ha}{b-a} \int_a^b \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H-h}{b-a} \int_a^b x \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx + h \int_b^{T/2} \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx \right]
 \end{aligned}$$

$$\int_0^a \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx = \frac{T}{2k\pi} \sin \left(\frac{2\pi k}{T} a \right)$$

$$\int_a^b \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx = \frac{T}{2k\pi} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) - \sin \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) \right]$$

$$\int_b^{T/2} \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx = -\frac{T}{2k\pi} \sin \left(\frac{2\pi k}{T} b \right)$$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b x \cos \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx &= \frac{T}{2k\pi} \left[b \sin \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) - a \sin \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) \right] - \frac{T}{2k\pi} \int_a^b \sin \left(k \frac{2\pi x}{T} \right) dx = \\
 &= \frac{T}{2k\pi} \left[b \sin \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) - a \sin \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) \right] + \frac{T^2}{4k^2\pi^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) - \cos \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) \right]
 \end{aligned}$$

Setzt man in den Ausdruck für a_k anstelle der Integrale die eben erst ermittelten Formeln ein, so ergibt sich für $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{4}{T} \left\{ \frac{T}{2k\pi} H \sin \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) + \frac{T}{2k\pi} \frac{Hb-ha}{b-a} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) - \sin \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. \frac{T}{2k\pi} \frac{H-h}{b-a} \left\{ b \sin \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) - a \sin \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{T}{2k\pi} \left[\cos \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) - \cos \left(\frac{2\pi k}{T} a \right) \right] \right\} - \frac{T}{2k\pi} h \sin \left(\frac{2\pi k}{T} b \right) \right\} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{T}{k^2 \pi^2} \frac{H-h}{b-a} \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T} a\right) - \cos\left(\frac{2\pi k}{T} b\right) \right] = \\
 &= \frac{2T}{k^2 \pi^2} \frac{H-h}{b-a} \sin\left[\frac{\pi k}{T}(b+a)\right] \sin\left[\frac{\pi k}{T}(b-a)\right].
 \end{aligned}$$

Das endgültige Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{(H-h)(a+b) + Th}{T} + \\
 &\frac{2T}{\pi^2} \frac{H-h}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left[\frac{\pi k}{T}(b+a)\right] \sin\left[\frac{\pi k}{T}(b-a)\right] \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Handelt es sich um das Bezugsprofil der genormten Zahnstange des Moduls m , so wählen wir als y -Achse die Zahnmittellinie, als x -Achse aber die Profilbezugslinie. Dann gelten für das Profil die folgenden Formeln

$$y(x) = \begin{cases} m & , \text{ wenn } 0 \leq x < 0,4214279 m \text{ ist} \\ 2,157864 m - 2,7474774 x & , \text{ wenn } 0,4214279 m \leq x < 1,240361 m \text{ ist} \\ -1,25 m & , \text{ wenn } 1,240361 m \leq x < 1,570796 m \text{ ist} \end{cases} \quad (3.4)$$

Die Periode der Funktion $y(x)$ ist πm . Die entsprechende Fourierreihe ist

$$y(x) = m \left[-0,05983134 + 1,7490984 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1,661789 k) \sin(0,8189331 k)}{k^2} \cos\left(\frac{2k}{m} x\right) \right]. \quad (3.5)$$

Im Falle eines Zahnrades wird das Problem etwas komplizierter, denn der Radiusvektor des Zahnprofils darf auch eine mehrdeutige Funktion des Polarwinkels sein. Diese Schwierigkeit räumt man aus dem Wege indem man den expliziten Rechenausdruck des Radiusvektors als Funktion des Polarwinkels durch Parameterdarstellungen des Radiusvektors und des Polarwinkels ersetzt. Am besten geeignet für die Aufgabe solch eines Parameters scheint die Länge des Bogens des Profils zu sein. Sowohl der Radiusvektor als auch der Polarwinkel sind eindeutige Funktionen dieser Länge. In den meisten Interesse erweckenden Fällen kann der Radiusvektor als eine gerade periodische Funktion des Parameters und folglich in der Form der Fourierreihe (3.1) dargestellt werden. Der Polarwinkel ist dagegen keine periodische Funktion der Länge des Bogens. Wenn aber der Radiusvektor eine periodische Funktion dieses Parameters ist, gilt das auch für die Ableitung des Polarwinkels nach demselben Parameter, wobei die Perioden der beiden Funktionen übereinstimmen. So kann auch diese Ableitung in der Form (3.1) dargestellt werden. Integriert man die entsprechende Fourierreihe gliedweise, so erhält man eine Entwicklung für den Polarwinkel.

Die Anwendung dieses Verfahrens wird am Beispiel einer Kreisevolvente, und zwar des dem Bezugsprofil entsprechenden Zahnprofils eines Stirnrades mit der Zähnezah 45, demonstriert. Die Wahl dieser Zähnezah ist darauf zurückzuführen, dass der Radius des Grundkreises in diesem Falle kleiner als der des Fußkreises ist. Das bedeutet, dass der Zahn theoretisch keine Fußrundung zu haben braucht, und dass das Profil aus einem einzigen Bogen der Evolvente bestehen kann.²

Wir wählen die folgende parametrische Darstellung der Evolvente des Kreises mit dem Radius r in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt O des Kreises:

² Tatsächlich gibt es eine Fußrundung (auch theoretisch) immer, wenn der Zahn mit einem der Wälzverfahren hergestellt wird. Die Form der Rundung hängt aber i.a. von der Wahl des Wälzverfahrens ab.

$$\begin{cases} x = r(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ y = r(\sin \phi - \phi \cos \phi) \end{cases} \quad (3.6)$$

wobei ϕ den Wälzwinkel bezeichnet. Entspricht ein Punkt der Evolvente dem Wert ϕ des Wälzwinkels, so ist der Radiusvektor des Punkts

$$\rho(\phi) = r\sqrt{1 + \phi^2} \quad (3.7)$$

und der entsprechende Polarwinkel

$$\zeta(\phi) = \phi - \arctan \phi. \quad (3.8)$$

Daraufhin ergibt sich

$$\frac{dx}{d\phi} = r\phi \cos \phi, \quad \frac{dy}{d\phi} = r\phi \sin \phi,$$

und daraus das Differential der Bogenlänge der Kreisevolvente

$$dl = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} d\phi = r\phi d\phi$$

Die Länge des Bogens der Kreisevolvente (3.6) zwischen den Punkten mit den Werten ϕ_0 und ϕ des Wälzwinkels beträgt somit

$$l = r \int_{\phi_0}^{\phi} t dt = \frac{r}{2} (\phi^2 - \phi_0^2). \quad (3.9)$$

Jetzt wird es möglich, den Polarwinkel und den Radiusvektor eines beliebigen Punkts der Evolvente durch die Länge eines sich an diesen Punkt schließenden Bogens auszudrücken. Die Länge l des Bogens soll von dem dem Wälzwinkel ϕ_0 entsprechenden Punkt der Evolvente gemessen werden. Aus (3.9) folgt dann

$$\phi = \sqrt{\frac{2l}{r} + \phi_0^2} \quad (3.10)$$

$$\rho(l) = r\sqrt{1 + \frac{2l}{r} + \phi_0^2} \quad (3.11)$$

$$\zeta(l) = \sqrt{\frac{2l}{r} + \phi_0^2} - \arctan \sqrt{\frac{2l}{r} + \phi_0^2}. \quad (3.12)$$

In den Formeln (3.10)–(3.12) nimmt man die positiven Werte der Quadratwurzeln. Der Radius des Teilkreises eines Stirnrades des Moduls m mit der Zähnezahl 45 ist

$$r_t = \frac{45m}{2} = 22,5m. \quad (3.13)$$

Der Radius des Grundkreises dieses Stirnrades ist

$$r = 22,5m \cos 20^\circ \approx 21,143084m. \quad (3.14)$$

Der Radius des Fußkreises ist

$$r_1 = 22,5 \text{ m} - 1,25 \text{ m} = 21,25 \text{ m}. \quad (3.15)$$

Den Wälzwinkel der einem zu dem Fußkreis gehörenden Punkt der Evolvente entspricht findet man aus der Gleichung

$$21,25 \text{ m} = 21,143084 \text{ m} \sqrt{1 + \phi_0^2},$$

woraus

$$\phi_0 = \sqrt{\left(\frac{21,25}{21,143084}\right)^2 - 1} \approx 0,1006933.$$

Der diesem Punkt entsprechende Polarwinkel ist

$$\zeta(\phi_0) = \phi_0 - \arctan \phi_0 \approx 0,1006933 - \arctan 0,1006933 \approx 0,0003383.$$

Den Wälzwinkel der einem zu dem Kopfkreis gehörenden Punkt der Evolvente entspricht findet man aus der Gleichung

$$(22,5 + 1) \text{ m} = 21,143084 \text{ m} \sqrt{1 + \phi_1^2},$$

woraus

$$\phi_1 = \sqrt{\left(\frac{23,5}{21,143084}\right)^2 - 1} \approx 0,4851553.$$

Der entsprechende Polarwinkel ist

$$\zeta(\phi_1) = \phi_1 - \arctan \phi_1 \approx 0,4851553 - \arctan 0,4851553 \approx 0,03345383.$$

Den Wälzwinkel der einem zu dem Teilkreis gehörenden Punkt der Evolvente entspricht findet man aus der Gleichung

$$22,5 \text{ m} = 21,143084 \text{ m} \sqrt{1 + \phi_t^2},$$

woraus

$$\phi_t = \sqrt{\left(\frac{22,5}{21,143084}\right)^2 - 1} \approx 0,3639702.$$

Der entsprechende Polarwinkel ist

$$\zeta(\phi_t) = \phi_t - \arctan \phi_t \approx 0,3639702 - \arctan 0,3639702 \approx 0,01490438.$$

Sowohl der Winkel $\zeta(\phi_0)$ als auch die Winkel $\zeta(\phi_1)$ und $\zeta(\phi_t)$ werden vom Anfangspunkt der Evolvente gemessen.

Die Größe des Polarwinkels, der den zwischen dem Teilkreis und dem Kopfkreis liegenden Teil der Evolvente umfasst, ist

$$\zeta(\phi_1) - \zeta(\phi_t) = 0,03345383 - 0,01490438 = 0,01854945.$$

Der Polarwinkel, der eine Hälfte des zu einem Zahn gehörenden Kopfkreisbogens umfasst, ist

$$\frac{\pi}{90} - 0,01854945 \approx 0,01635714.$$

Der den Bogen der Evolvente umfassende Polarwinkel ist

$$0,03345383 - 0,0003383 \approx 0,0331155.$$

Der Polarwinkel, der eine Hälfte des zu einer Zahnücke gehörenden Fußkreisbogens umfasst, ist

$$\frac{\pi}{45} - 0,01635714 - 0,0331155 \approx 0,0203405.$$

Jetzt stellen wir fest, dass die halbe Länge des zu einer Zahnücke gehörenden Fußkreisbogens

$$\left(\frac{45 m}{2} - 1,25 m \right) 0,0203405 \approx 0,4322356 m \quad (3.16)$$

ist, die Länge einer Hälfte des einem Zahne gehörenden Kopfkreisbogens

$$\left(\frac{45 m}{2} + m \right) 0,01635714 \approx 0,3843928 m \quad (3.17)$$

ist und die Länge des Bogens der Evolvente

$$\frac{21,143084 m}{2} (0,4851553^2 - 0,1006933^2) \approx 2,3810974 m \quad (3.18)$$

ist.

Also ist die gesamte Länge einer Hälfte des Zahnprofils

$$(0,4322356 + 0,3843928 + 2,3810974) m = 3,1977258 m. \quad (3.19)$$

Die ermittelte Größe beträgt eine Hälfte der Periode der Funktion, die den Radiusvektor eines Punkts des Zahnprofils durch die Länge eines Bogens des Profils ausdrückt. Dasselbe gilt, wie gesagt, auch für die Ableitung (nach der Länge des Bogens) der Funktion, die den Polarwinkel des Punkts durch die Länge des Bogens ausdrückt.

Folglich können sowohl der Radiusvektor als auch die erwähnte Ableitung in der Form der Reihen

$$\begin{aligned} f(l) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{2 \cdot 3,1977258 m} l\right) \approx \\ &\approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(0,9824459 k \frac{l}{m}\right) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Weiterhin erfolgt die Berechnung der entsprechenden Fourierkoeffizienten mittels der Formeln

$$a_k = \frac{2}{3,1977258 m} \int_0^{3,1977258 m} f(l) \cos\left(\frac{\pi k}{3,1977258 m} l\right) dl.$$

Wir schreiben jetzt die Ausdrücke für den Radiusvektor ρ und den Polarwinkel ζ als Funktionen der Bogenlänge l im Intervall $0 \leq l < 3,1977258 \text{ m}$ auf.

Wird die Länge des Bogens von der Mittellinie der Zahnücke gemessen, so entspricht dem Fußkreis der Bereich der Werte $0 \leq l < 0,4322356 \text{ m}$. Für diesen Bogenlängenbereich gilt

$$\rho(l) = 21,25 \text{ m}; \quad \zeta(l) = \frac{0,0203405}{0,4322356} \frac{l}{m} \approx 0,0470588 \frac{l}{m}. \quad (3.20)$$

Der Gesamtbetrag der dem Fußkreis entsprechenden Bogenlänge und der der Evolvente ist

$$(0,4322356 + 2,3810974) \text{ m} = 2,813333 \text{ m}.$$

Für das Segment $0,4322356 \text{ m} \leq l < 2,813333 \text{ m}$ stellt das Profil des Zahnes den Bogen der Evolvente des Grundkreises dar. Dem Anfangspunkt dieses Bogens entspricht der Wälzwinkel $\phi_0 \approx 0,1006933$, dem Endpunkt aber der Wälzwinkel $\phi_1 \approx 0,4851553$. Für den Wälzwinkel ϕ und die Bogenlänge l gilt in diesem Falle das Verhältnis

$$l - 0,4322356 \text{ m} = \frac{21,143084 \text{ m}}{2} (\phi^2 - 0,1006933^2) \quad (3.21)$$

oder unter Berücksichtigung des Verhältnisses (3.7)

$$l - 0,4322356 \text{ m} = \frac{21,143084 \text{ m}}{2} \left[\left(\frac{\rho(l)}{21,143084 \text{ m}} \right)^2 - 1 - 0,1006933^2 \right],$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \rho(l) &= 21,143084 \text{ m} \sqrt{\frac{2(l - 0,4322356 \text{ m})}{21,143084 \text{ m}} + 1 + 0,1006933^2} = \\ &= 21,143084 \text{ m} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 \frac{l}{m}}. \end{aligned}$$

Aus (3.21) folgt

$$\phi = \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}.$$

Dem ermittelten Wert des Wälzwinkels entspricht der Polarwinkel

$$\zeta_0 = \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476} - \arctan \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476},$$

der vom Anfangspunkt der Evolvente gemessen wird. Wenn von der Mittellinie der Zahnücke gemessen wird, ist der Polarwinkel des Anfangspunkts der Evolvente

$$\zeta = \frac{\pi}{90} - \zeta(\phi_t) = \frac{\pi}{90} - 0,01490438 = 0,02000221.$$

Endgültig erhalten wir für das Segment der Bogenlängen $0,4322356 \text{ m} \leq l < 2,813333 \text{ m}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(l) = 21,143084 m \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 \frac{l}{m}} \\ \zeta(l) = 0,02000221 + \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476} - \\ \quad - \arctan \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Zum Schluss gilt für die Bogenlängen $2,813333 m \leq l < 3,1977258 m$ $\rho = 23,5 m$. Der Polarwinkel wächst in diesem Abschnitt linear vom Wert $0,02000221 + 0,03345383 = 0,05345604$ bis zum Wert $\frac{\pi}{45} \approx 0,06981317$. Hieraus ergibt sich der Ausdruck für den Polarwinkel, der der Bogenlänge l entspricht,

$$\zeta(l) = 0,05345604 + \frac{l - 2,813333 m}{23,5 m} \approx 0,04255319 \frac{l}{m} - 0,06626026.$$

Also gilt für die Bogenlängen $2,813333 m \leq l < 3,1977258 m$

$$\rho(l) = 23,5 m; \quad \zeta(l) = 0,04255319 \frac{l}{m} - 0,06626026. \quad (3.23)$$

Jetzt ermitteln wir den Rechenausdruck für die Ableitung des Polarwinkels nach der Bogenlänge des Profils. Im allgemeinen gilt für eine beliebige differenzierbare Funktion $f(t)$ der Variablen t

$$\frac{d}{dt} [f(t) - \arctan f(t)] = f'(t) - \frac{f'(t)}{1 + [f(t)]^2} = \frac{[f(t)]^2 f'(t)}{1 + [f(t)]^2}.$$

Im betrachteten Falle ist es die Funktion

$$f(l) = \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}$$

$$\frac{df}{dl} = \frac{0,09459358}{2m \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}}.$$

Für $0 \leq l < 0,4322356 m$ gilt

$$\frac{d\zeta(l)}{dl} = \frac{0,0470588}{m}. \quad (3.24)$$

Für $2,813333 m \leq l < 3,1977258 m$ gilt

$$\frac{d\zeta(l)}{dl} = \frac{0,04255319}{m}. \quad (3.25)$$

Für $0,4322356 m \leq l < 2,813333 m$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{d\zeta(l)}{dl} &= \frac{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}{0,09459358 \frac{l}{m} + 0,9692524} \frac{0,04729679}{m \sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}} = \\
 &= \frac{0,04729679}{m} \frac{\sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}}{0,09459358 \frac{l}{m} + 0,9692524}. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Wir verfügen jetzt über alle für die Berechnung der uns interessierenden Fourierkoeffizienten notwendigen analytischen Terme.

Berechnen wir zunächst den Koeffizient a_0 der Fourierentwicklung der Funktion $\rho(l)$.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{4}{2 \cdot 3,1977258 m} \left[\int_0^{0,4322356 m} 21,25 m dl + \right. \\
 &\quad \left. 21,143084 m \int_{0,4322356 m}^{2,813333 m} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 \frac{l}{m}} dl + \int_{2,813333 m}^{3,1977258 m} 23,5 m dl \right] = \\
 &= \frac{2}{3,1977258 m} \left[21,25 \cdot 0,4322356 m^2 + 23,5 (3,1977258 - 2,813333) m^2 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{21,143084 m^2}{0,09459358} \int_{0,4322356}^{2,813333} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 u} d(0,9692524 + 0,09459358 u) \right] = \\
 &= \frac{2 m}{3,1977258} \left[18,2182373 + 223,5149996 \cdot \frac{2}{3} (0,9692524 + 0,09459358 u)^{3/2} \Big|_{0,4322356}^{2,813333} \right] = \\
 &= \frac{2 m}{3,1977258} [18,2182373 + 149,001 (1,3730886 - 1,0152472)] \approx 2 \cdot 22,3712 m. \\
 \frac{a_0}{2} &\approx 22,3712 m. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten a_k ($k = 1, 2, \dots$) derselben Fourierentwicklung gilt

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{4}{2 \cdot 3,1977258 m} \left[\int_0^{0,4322356 m} 21,25 m \cos\left(k \frac{2\pi l}{2 \cdot 3,1977258 m}\right) dl + \right. \\
 &\quad \left. 21,143084 m \int_{0,4322356 m}^{2,813333 m} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 \frac{l}{m}} \cos\left(k \frac{2\pi l}{2 \cdot 3,1977258 m}\right) dl + \right. \\
 &\quad \left. \int_{2,813333 m}^{3,1977258 m} 23,5 m \cos\left(k \frac{2\pi l}{2 \cdot 3,1977258 m}\right) dl \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,6254445 m \left[21,25 \int_0^{0,4322356} \cos(0,9824459 k u) du + \right. \\
 &21,143084 \int_{0,4322356}^{2,813333} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 u} \cos(0,9824459 k u) du + \\
 &23,5 \int_{2,813333}^{3,1977258} \cos(0,9824459 k u) du \left. \right] = \\
 &= 0,6254445 m \left[\frac{21,25}{0,9824459 k} \sin(0,42464809 k) - \frac{23,5}{0,9824459 k} \sin(2,7639475 k) + \right. \\
 &21,143084 \int_{0,4322356}^{2,813333} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 u} \cos(0,9824459 k u) du \left. \right] = \\
 &= 0,6254445 m \left[21,6295897 \frac{\sin(0,42464809 k)}{k} - 23,9198922 \frac{\sin(2,7639475 k)}{k} + \right. \\
 &21,143084 \int_{0,4322356}^{2,813333} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 u} \cos(0,9824459 k u) du \left. \right]. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Die folgende Formel stellt die Fourierreihe der Funktion $\rho(l)$ dar

$$\begin{aligned}
 \rho(l) = m \left\{ 22,3712 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[13,5281705 \frac{\sin(0,42464809 k)}{k} - 14,960565 \frac{\sin(2,7639475 k)}{k} + \right. \right. \\
 \left. \left. 13,2238256 \int_{0,4322356}^{2,813333} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 u} \cos(0,9824459 k u) du \right] \times \cos\left(0,9824459 k \frac{l}{m}\right) \right\}. \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Wir ermitteln jetzt die Koeffizienten der Fourierreihe der Ableitung des Polarwinkels nach der Bogenlänge des Zahnprofils.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{4}{2 \cdot 3,1977258 m} \int_0^{3,1977258 m} \frac{d\zeta(l)}{dl} dl = \\
 &= \frac{2}{3,1977258 m} [\zeta(3,1977258 m) - \zeta(0)] = \\
 &= \frac{2}{3,1977258 m} \left(\frac{0,04255319}{m} \cdot 3,1977258 m - 0,06626026 \right) \approx \frac{0,04366427}{m},
 \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} \approx \frac{0,02183213}{m}. \quad (3.30)$$

Für $k = 1, 2, \dots$ gilt

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{2 \cdot 3,1977258 m} \left[\int_0^{0,4322356 m} \frac{0,0470588}{m} \cos \left(k \frac{2\pi}{2 \cdot 3,1977258 m} l \right) dl + \right. \\ &\quad \int_{2,813333 m}^{3,1977258 m} \frac{0,04255319}{m} \cos \left(k \frac{2\pi}{2 \cdot 3,1977258 m} l \right) dl + \\ &\quad \left. \int_{0,4322356 m}^{2,813333 m} \frac{0,04729679}{m} \frac{\sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}}{0,09459358 \frac{l}{m} + 0,9692524} \cos \left(k \frac{2\pi}{2 \cdot 3,1977258 m} l \right) dl \right] = \\ &= \frac{0,6254445}{m^2} \left[0,0470588 \int_0^{0,4322356 m} \cos \left(0,9824459 k \frac{l}{m} \right) dl + \right. \\ &\quad 0,04255319 \int_{2,813333 m}^{3,1977258 m} \cos \left(0,9824459 k \frac{l}{m} \right) dl + \\ &\quad \left. 0,04729679 \int_{0,4322356 m}^{2,813333 m} \frac{\sqrt{0,09459358 \frac{l}{m} - 0,0307476}}{0,09459358 \frac{l}{m} + 0,9692524} \cos \left(0,9824459 k \frac{l}{m} \right) dl \right] = \\ &= \frac{0,6254445}{m^2} \left[\frac{0,04789964 m}{k} \sin(0,42464809 k) - \right. \\ &\quad \frac{0,04331352 m}{k} \sin(2,76394747 k) + \\ &\quad \left. 0,04729679 m \int_{0,4322356}^{2,813333} \frac{\sqrt{0,09459358 u - 0,0307476}}{0,09459358 u + 0,9692524} \cos(0,9824459 k u) du \right] = \\ &= \frac{0,6254445}{m} \left[0,04789964 \frac{\sin(0,42464809 k)}{k} - \right. \\ &\quad 0,04331352 \frac{\sin(2,76394747 k)}{k} + \\ &\quad \left. 0,04729679 \int_{0,4322356}^{2,813333} \frac{\sqrt{0,09459358 u - 0,0307476}}{0,09459358 u + 0,9692524} \cos(0,9824459 k u) du \right]. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Also ist die Fourierreihe der Ableitung des Polarwinkels nach der Bogenlänge des Zahnprofils

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta(l)}{dl} = & \frac{0,02183213}{m} + \frac{0,6254445}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left[0,04789964 \frac{\sin(0,42464809 k)}{k} - \right. \\ & \left. 0,04331352 \frac{\sin(2,76394747 k)}{k} + \right. \\ & \left. 0,04729679 \int_{0,4322356}^{2,813333} \frac{\sqrt{0,09459358 u - 0,0307476}}{0,09459358 u + 0,9692524} \cos(0,9824459 k u) du \right] \times \cos\left(0,9824459 k \frac{l}{m}\right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Integrieren wir (3.32) gliedweise im Intervall $(0, l)$, so entsteht eine sozusagen gemischte Entwicklung für den Polarwinkel

$$\begin{aligned} \zeta(l) = & \frac{0,02183213 l}{m} + 0,6366198 \sum_{k=1}^{\infty} \left[0,04789964 \frac{\sin(0,42464809 k)}{k^2} - 0,04331352 \frac{\sin(2,76394747 k)}{k^2} + \right. \\ & \left. \frac{0,04729679}{k} \int_{0,4322356}^{2,813333} \frac{\sqrt{0,09459358 u - 0,0307476}}{0,09459358 u + 0,9692524} \cos(0,9824459 k u) du \right] \times \sin\left(0,9824459 k \frac{l}{m}\right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \zeta(l) = & \frac{0,02183213 l}{m} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[0,03049386 \frac{\sin(0,42464809 k)}{k^2} - 0,02757424 \frac{\sin(2,76394747 k)}{k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{0,03011007}{k} \int_{0,4322356}^{2,813333} \frac{\sqrt{0,09459358 u - 0,0307476}}{0,09459358 u + 0,9692524} \cos(0,9824459 k u) du \right] \times \sin\left(0,9824459 k \frac{l}{m}\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Durch den Faktor $\frac{1}{k^2}$ konvergiert die Reihe (3.33) relativ schnell. Differenzieren wir dagegen gliedweise die Reihe (3.29), um die Ableitung der Funktion $\rho(l)$ und daraus die in der Gleichung (2.21) erscheinende Ableitung $\rho'(\zeta)$ zu berechnen, so entsteht die Reihe

$$\frac{d\rho}{dl} = - \sum_{k=1}^{\infty} [13,2906956 \sin(0,42464809 k) - 14,6979458 \sin(2,7639475 k) + \quad (3.34)$$

$$12,9916932 k \int_{0,4322356}^{2,813333} \sqrt{0,9692524 + 0,09459358 u} \cos(0,9824459 k u) du] \times \sin\left(0,9824459 k \frac{l}{m}\right),$$

die infolge ihrer langsamen Konvergenz praktisch nicht verwendbar ist.

Doch im Falle der Kreisevolvente braucht man eigentlich die Ableitung $\rho'(\zeta)$ nicht zu berechnen. Es ist leicht ersichtlich, dass

$$\frac{\rho'(\zeta)\rho(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \quad (3.35)$$

dem Betrag nach nichts anderes ist als die Projektion des Radiusvektors des Punkts der Kurve auf die Tangente zu demselben Punkt. Das Vorzeichen ist von dem Vorzeichen der Ableitung $\rho'(\zeta)$ bestimmt. Wenn es

sich um eine Kreisevolvente handelt, ist die oben erwähnte Projektion (unabhängig von der Wahl des Punktes) dem Radius des Grundkreises gleich. Für einen Kreisbogen gilt natürlich $\rho'(\zeta) \equiv 0$.

So kann der Wert des Rechenausdrucks (3.35) immer ermittelt werden, wenn die Fourierkoeffizienten der der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq x < 0,4322356 \text{ ist} \\ 1, & \text{wenn } 0,4322356 \leq x < 2,813333 \text{ ist} \\ 0, & \text{wenn } 2,813333 \leq x < 3,1977258 \text{ ist} \end{cases} \quad (3.36)$$

entsprechenden Sinusreihe vorhanden sind. Diese Reihe konvergiert schnell genug, um praktisch verwendbar zu sein.

Durch ebenso einfache Überlegungen gelangt man zum Schluss, dass im Falle der Kreisevolvente

$$\arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \phi$$

gilt, wobei ϕ der entsprechende Wälzwinkel ist, dessen Rechenausdruck die Formel (3.10) darstellt. So las-

sen sich die Werte der Funktion $\arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}$ berechnen, wenn die Fourierkoeffizienten der der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 0 \leq x < 0,4322356 \text{ ist} \\ \arctan \sqrt{0,09459358 x - 0,0307476}, & \text{wenn } 0,4322356 \leq x < 2,813333 \text{ ist} \\ 0, & \text{wenn } 2,813333 \leq x < 3,1977258 \text{ ist} \end{cases} \quad (3.37)$$

entsprechenden Sinusreihe bekannt sind. Auch diese Reihe erweist sich praktisch als verwendbar.

Alle oben angeführten Überlegungen gelten offensichtlich auch im allgemeinen Falle, d.h. im Falle eines un-

4. Ein Beispiel der Anwendung des allgemeinen Verfahrens

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die in vorhergehenden Kapiteln abgeleiteten Gleichungen und Formeln auf die Synthese einer konkreten Verzahnung angewandt sein können.

Gehen wir nämlich von dem durch die Fourierentwicklungen (3.29) und (3.33) definierten Profil als dem Stirnquerschnittsprofil eines Zahnrades aus, dessen Zähne eine Schraubenfläche mit Rechtswindung bilden und auf dem Teilzylinder den Anstieg 75° haben. Der Schraubengang dieses Zahnrads muss

$$T = 45 m \pi \tan 75^\circ \approx 527,60625 m$$

sein (wobei m wie üblich den Modul des Zahnrades bezeichnet). Gesucht wird der Stirnquerschnitt des Schraubenzahnrades, das 60 Zähne hat und mit dem gegebenen Zahnrad eine Außenverzahnung bildet. Da diese Zahnräder in entgegengesetzten Richtungen rotieren müssen, muss der Schraubengang des zweiten Schraubenzahnrades

$$T_1 = -\frac{60}{45} T \approx -703,47500 m$$

sein, da die Größen T und T_1 in diesem Falle mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden sollen.

Wir nehmen an, dass der Achsabstand der die Verzahnung bildenden Zahnräder

$$L = \frac{45 + 60}{2} m = 52,5 m$$

sein soll. Ferner ist

$$\frac{T_1 - T}{TL} \approx \frac{(-703,47500 - 527,60625)m}{527,60625 \cdot 52,5 m^2} \approx -\frac{0,0444444444}{m}.$$

Substituiert man die soeben ermittelten Größen in den Rechenausdruck für z , so ergibt sich

$$z = 83,9711427 m \left\{ -\arcsin \left[\frac{0,0444444444}{m} \frac{\rho'(\zeta)\rho(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \right] + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta \right\}. \quad (4.1)$$

Durch Verwendung von Fourierreihen lässt sich die Berechnung des rechten Teils der soeben gewonnenen Formel für alle Werte von ζ in einheitlicher Weise ausführen. Die notwendigen Fourierkoeffizienten wurden in 4 Dateien gespeichert.

Die erste Datei enthält die ersten 10000 Fourierkoeffizienten der der Funktion (3.36) entsprechenden Sinusreihe. Die zweite Datei enthält die ersten 10000 Fourierkoeffizienten der Sinusreihe der Funktion $\zeta(l/m)$. Alle Fourierkoeffizienten wurden mit doppelter Präzision berechnet. Das Integral, für dessen Integrandfunktion keine Stammfunktion in geschlossener Form gefunden werden kann, wurde mittels Simpson'scher Regel berechnet. Das Integrationsintervall wurde dabei in 8192 Teilintervalle zerlegt.

Die dritte Datei enthält die ersten 15000 Fourierkoeffizienten der der Funktion (3.37) entsprechenden Sinusreihe. Die vierte Datei enthält die ersten 15000 Fourierkoeffizienten der Kosinusreihe der Funktion $\rho(l/m)$. Auch diese zwei Dateien enthalten mit doppelter Präzision berechnete Fourierkoeffizienten. Die Integrale, für deren Integrandfunktionen keine Stammfunktionen in geschlossener Form gefunden werden können, wurden mittels Simpson'scher Regel berechnet, wobei jedes der beiden letzteren Integrationsintervalle in 16384 Teilintervalle zerlegt wurde.

Diese Berechnungen waren zwar aufwendig und forderten relativ viel Zeit. Doch als die Dateien vorhanden waren, ging das Weitere schnell genug und hohe Genauigkeit wurde erreicht.

Bevor die Ergebnisse der Verwendung der Formel (4.1) gezeigt werden, bringen wir noch einige Überlegungen vor. Obwohl alle eventuellen Durchstoßpunkte der Schraubenlinie (2.24) und der Schraubenfläche (2.1) aus der Gleichung (2.26) ermittelt werden können, erschwert jener Umstand die Lösung der Gleichung, dass die Funktion $\arccos x$ nur für $-1 \leq x \leq 1$ definiert ist. Das erzwingt bei jedem Schritt der Suche nach den Wurzeln der Gleichung den Wert des Arguments dieser Funktion zu überprüfen und, falls die soeben erwähnten Ungleichheiten nicht erfüllt sind, den betreffenden Schritt zu überspringen. Andererseits ist die genaue Kenntnis der Durchstoßpunkte der Schraubenlinie und der Schraubenfläche von keiner großen Bedeutung. Stellen wir nur für einen Punkt der Linie (2.24) fest, dass er innerhalb der Oberfläche (2.1) liegt, so ist diese Schraubenlinie untauglich.

Eine Ebene $z = \tilde{z}$ schneidet die Schraubenlinie (2.24) in dem Punkte, dessen Koordinaten im Koordinatensystem $Oxyz$

$$\left\{ L + r_0 \cos \left[\frac{2\pi}{T_1} (\tilde{z} - z_0) + \zeta_{10} \right], r_0 \sin \left[\frac{2\pi}{T_1} (\tilde{z} - z_0) + \zeta_{10} \right], \tilde{z} \right\} \quad (4.2)$$

sind. Die Gleichungen des Schnittbildes derselben Ebene und der Oberfläche (2.1) im Koordinatensystem $Oxyz$ sind

$$\begin{cases} x = \rho(\zeta) \cos \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \tilde{z} \right) \\ y = \rho(\zeta) \sin \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \tilde{z} \right) \\ z = \tilde{z} \end{cases} \quad (4.3)$$

Ist (4.2) kein Punkt des Inneren der geschlossenen Kurve (4.3), so stellen wir fest, dass die Schraubenlinie in der Ebene $z = \tilde{z}$ außerhalb der Schraubenfläche verläuft. Wenn eine ausreichend große Zahl von dicht genug gelegenen zu z -Achse senkrechten Ebenen solch einer Prüfung unterworfen wurde, und in jeder dieser Ebenen der entsprechende Punkt (4.2) kein Punkt des Inneren der entsprechenden Kurve (4.3) ist, kann die Schraubenlinie (2.24) als taugliche akzeptiert werden. Es ist ja selbstverständlich, dass „ausreichend große“ und „dicht genug“ keine eindeutig definierbaren Begriffe sind. Auch kann die Entscheidung, ob der Punkt (4.2) im Inneren oder im Äußeren der Kurve (4.3) liegt, schwierig sein, wenn der Abstand zwischen dem Punkt und der Kurve sehr klein ist, weil mögliche Ungenauigkeiten der Kalkulationen berücksichtigt werden sollen. Man muss sich nämlich letzten Endes auf den gesunden Menschenverstand verlassen.

Wir zeigen jetzt, wie die Prüfung für die Ebene $z = \tilde{z}$ ausgeführt werden kann. \tilde{O} und \tilde{O}_1 seien Punkte, deren Koordinaten im Koordinatensystem $Oxyz$ $(0,0,\tilde{z})$ bzw. $(L,0,\tilde{z})$ sind. Den entsprechenden Punkt (4.2) machen wir durch den Buchstaben \tilde{P} kenntlich. Dann bilden die Strecken $\tilde{O}_1\tilde{O}$ und $\tilde{O}_1\tilde{P}$ (für eine Außenverzahnung) den Winkel

$$\alpha_{\tilde{z}} = \pi - \zeta_{10} - \frac{2\pi}{T_1}(\tilde{z} - z_0).$$

Kennt man den Wert $\alpha_{\tilde{z}}$, so kann durch Verwendung des Kosinussatzes die Länge der Strecke $\tilde{O}\tilde{P}$ ermittelt werden, da die Größen $\tilde{O}\tilde{O}_1 = L$ und $\tilde{O}_1\tilde{P} = r_0$ schon bekannt sind. Wenn die Länge $\tilde{O}\tilde{P}$ ermittelt ist, läßt sich der Winkel, den die Strecken $\tilde{O}\tilde{O}_1$ und $\tilde{O}\tilde{P}$ bilden (der fernerhin als $\beta_{\tilde{z}}$ bezeichnet wird), durch Verwendung entweder des Kosinus- oder des Sinussatzes ermitteln. Der Radiusvektor des Kreuzungspunktes der entsprechenden Kurve (4.3) und des Strahls $\tilde{O}\tilde{P}$ ist $\rho(\zeta)$, wobei $\zeta = \beta_{\tilde{z}} - \frac{2\pi}{T}\tilde{z}$ ist. Ist

$\rho\left(\beta_{\tilde{z}} - \frac{2\pi}{T}\tilde{z}\right) \leq \tilde{O}\tilde{P}$, so liegt \tilde{P} nicht im Inneren der Kurve (4.3). Dies bedeutet, dass das Ergebnis der Prüfung für die Ebene $z = \tilde{z}$ positiv ist. Man kann die Prüfung nach Belieben fortsetzen. Wenn es sich dagegen herausstellt, dass $\tilde{O}\tilde{P} < \rho\left(\beta_{\tilde{z}} - \frac{2\pi}{T}\tilde{z}\right)$ ist, so ist \tilde{P} ein Punkt des Inneren der Kurve (4.3) und die

Schraubenlinie (2.24) schneidet die Schraubenfläche (2.1)³. Ist dabei die Differenz der beiden verglichenen Größen nicht vernachlässigbar gering, so lohnt sich offenbar die Fortsetzung der Prüfung nicht. Die betreffende Schraubenlinie soll als untaugliche abgewiesen werden.

Sowohl die mittels der Formel (4.1) berechneten Werte von z als auch die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchstoßpunkte der ermittelten Schraubenlinien und der Ebene $z = 0$ sind in Tabelle 1 zusammengefasst worden. Als Maßeinheit der Länge wird dabei der Modul der Verzahnung verwendet.

Da zwischen dem Kopfkreis eines der verzahnten Zahnräder und dem Fußkreis des andern immer ein Spiel vorgesehen sein muß, sind für die Synthese der Verzahnung nur die Punkte der gegebenen Schraubenfläche von Interesse, deren Abstand (gegebenenfalls) von der Achse des Zahnrades nicht kleiner als $21,5m$ ist. Aus der ersten der Formeln (3.22) folgt, dass dem Radiusvektor der erwähnten Länge unter andern die Länge $0,684978088m$ des Bogens des Profils entspricht.⁴ Doch zeigt die gemäß dem beschriebenen Verfahren ausgeführte Prüfung, dass die für die zwischen $0,7m$ und $1,0m$ liegenden Bogenlängen ermittelten Schraubenlinien die gegebene Schraubenfläche schneiden und damit untauglich sind. Dabei ergibt sich sogar für die Bogenlängen bis einschließlich $0,9m$ $r_0 > 31m$, was offensichtlich nicht akzeptabel ist. Deshalb sind die entsprechenden Werte der Bogenlängen in Tabelle 1 fortgelassen worden. Das zeigt übrigens einen der Vor-

³ Ist der Radiusvektor eine mehrdeutige Funktion des Polarwinkels, so wird die Prüfung offenbar etwas komplizierter.

⁴ Andere entsprechende Längen des Bogens können ausgehend aus der Periodizität der geraden Funktion $\rho(l)$ ermittelt werden.

teile der Verwendung von Fourierreihen. Man wird dadurch von der Notwendigkeit befreit eine extra Prüfung auszuführen, um mögliche Interferenzen der Zähne vorzubeugen. Eine solche Prüfung wäre unentbehrlich gewesen, wenn Hüllkurven oder Hüllflächen verwendet worden wären. Es ist nämlich auf jene Tatsache zurück zu führen, dass sowohl eine Hüllkurve als auch eine Hüllfläche i.a. die Kurven bzw. Flächen der entsprechenden Schar durchdringen kann. Folgt man dagegen dem vorgeschlagenen Prinzip, so kann für jede ermittelte Schraubenlinie sofort und in einheitlicher Weise geprüft werden, ob sie die gegebene Schraubenfläche schneidet. Diese Einheitlichkeit ermöglicht die Realisierung der Prüfung als ein Computerprogramm, das interaktive Arbeit erlaubt. Für alle in Tabelle 1 angeführten Punkte konnten die Ergebnisse der Prüfung als positive abgeschätzt werden. Wenn auch einige Durchdringungen von den Schraubenlinien in die Schraubenfläche (2.1) stattgefunden haben, waren sie so gering, dass sie sicher auf unvermeidliche Ungenauigkeiten der Kalkulationen zurück geführt werden konnten.

Es ist von Interesse zu klären, ob die durch die Koordinaten x_1 und y_1 definierten Punkte bestimmten Evolventen des Kreises gehören, dessen Mittelpunkt der Punkt O_1 und dessen Radius $R = 30 \cos 20^\circ \approx 28,1907786 m$ sind. Wir zeigen beispielsweise wie das für die Punkte $(-30,726841055 m; 0,509016776 m)$, $(-30,585022779 m; 0,566848945 m)$ und $(-30,453982352 m; 0,618206466 m)$ geprüft werden kann. Dem Radiusvektor (Abstand von O_1) des ersten Punktes

l/m	z_1/m	x_1/m	y_1/m
-2,7	12,157734036	-29,269978440	-0,995508459
-2,6	11,341408808	-29,329808937	-0,980340816
-2,5	10,439680332	-29,390806253	-0,964901968
-2,4	9,577559211	-29,455877085	-0,947329476
-2,3	8,663843549	-29,524302291	-0,928800633
-2,2	7,725740393	-29,595055332	-0,908533498
-2,1	6,781003806	-29,670916557	-0,886526297
-2,0	5,791585026	-29,749657806	-0,862628895
-1,9	4,775796732	-29,833352409	-0,836620891
-1,8	3,738338598	-29,92163619	-0,8081994
-1,7	2,649345119	-30,015022045	-0,777137814
-1,6	1,527092989	-30,11453165	-0,74306313
-1,5	0,368492546	-30,219823213	-0,705607805
-1,4	-0,861032371	-30,333356962	-0,664103561
-1,3	-2,12910422	-30,453982352	-0,618206466
-1,2	-3,471338897	-30,585022779	-0,566848945
-1,1	-4,902155852	-30,726841055	-0,509016776
1,1	4,902155852	-30,726841055	0,509016776
1,2	3,471338897	-30,585022779	0,566848945
1,3	2,12910422	-30,453982352	0,618206466
1,4	0,861032371	-30,333356962	0,664103561
1,5	-0,368492546	-30,219823213	0,705607805
1,6	-1,527092989	-30,11453165	0,74306313
1,7	-2,649345119	-30,015022045	0,777137814
1,8	-3,738338598	-29,92163619	0,8081994
1,9	-4,775796732	-29,833352409	0,836620891
2,0	-5,791585026	-29,749657806	0,862628895
2,1	-6,781003806	-29,670916557	0,886526297
2,2	-7,725740393	-29,595055332	0,908533498
2,3	-8,663843549	-29,524302291	0,928800633
2,4	-9,577559211	-29,455877085	0,947329476
2,5	-10,439680332	-29,390806253	0,964901968
2,6	-11,341408808	-29,329808937	0,980340816
2,7	-12,157734036	-29,269978440	0,995508459

Tabelle 1

$$R_1 \approx \sqrt{30,726841055^2 + 0,509016776^2} m \approx 30,7310569 m$$

entspricht der Wälzwinkel

$$\Phi_1 \approx \sqrt{\left(\frac{30,7310569}{28,1907786}\right)^2} - 1 \approx 0,433981995$$

und der Polarwinkel

$$Z_1 \approx 0,433981995 - \arctan 0,433981995 \approx 0,0245281817 ,$$

wobei Z_1 vom Anfangspunkt der vermuteten Evolvente gemessen werden soll. Ebenso ergibt sich

$$Z_2 \approx 0,0225645633$$

für den zweiten Punkt und

$$Z_3 \approx 0,0207956891$$

für den dritten. Liegen die ausgewählten Punkte wirklich auf der Evolvente, so muss die Differenz $Z_1 - Z_2 \approx 0,0245281817 - 0,0225645633 \approx 0,0019636184$ dem Winkel gleich sein, den die aus Punkt O_1 auf den ersten und den zweiten Punkt gerichteten Strahlen bilden. Der letztere ergibt sich als

$$\arctan \frac{0,566848945}{30,585022779} - \arctan \frac{0,509016776}{30,726841055} \approx 0,0019670727 .$$

Die beiden ermittelten Werte treffen ganz genau zusammen. Nehmen wir den zweiten Punkt und den dritten, so ergibt sich einerseits $Z_2 - Z_3 \approx 0,0225645633 - 0,0207956891 \approx 0,0017688742$, andererseits aber

$$\arctan \frac{0,618206466}{30,453982352} - \arctan \frac{0,566848945}{30,585022779} \approx 0,0017654795 .$$

Das Zusammentreffen der beiden Größen ist wiederum sehr gut. Auf diese Art sind mehrere Paare der ermittelten Punkte geprüft worden und alle Ergebnisse sind ebenso befriedigend ausgefallen. So bewahrheitet sich die Vermutung, dass die Punkte, deren Koordinaten in der Tabelle 1 angeführt sind, zu zwei Evolventen des oben erwähnten Kreises gehören.

Es lohnt sich auch die Vermutung zu prüfen, dass die Berührungspunkte der gegebenen und der ermittelten Schraubenflächen eine (endliche) Menge Geraden bilden. Zu diesem Zwecke sind in Tabelle 2 Koordinaten der Berührungspunkte mit den entsprechenden Bogenlängen des gegebenen Profils zusammengefasst worden.

Die Gleichungen der Geraden, die durch die Bogenlängen $l = -2,7 m$ und $l = -1,1 m$ bestimmte Punkte verbindet, heißen

$$\frac{x - 21,82488671}{23,29453153 - 21,82488671} = \frac{y + 1,853452064}{2,182495507 + 1,853452064} = \frac{z + 4,902155852}{12,157734036 + 4,902155852}$$

oder

$$\frac{x - 21,82488671}{1,46964482} = \frac{y + 1,853452064}{4,035947571} = \frac{z + 4,902155852}{17,05988988} . \quad (4.4)$$

Gegeben seien nun die Gerade g durch ihre Gleichungen

$$\frac{x - \tilde{x}_0}{k} = \frac{y - \tilde{y}_0}{l} = \frac{z - \tilde{z}_0}{m}$$

und der Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$. Es ist leicht festzustellen, dass man den Abstand des Punkts P von der Geraden g mittels der Formel

$$\sqrt{(x_0 - \tilde{x}_0 - kt)^2 + (y_0 - \tilde{y}_0 - lt)^2 + (z_0 - \tilde{z}_0 - mt)^2} \quad (4.5)$$

berechnen kann, wobei für t

$$t = \frac{(x_0 - \tilde{x}_0)k + (y_0 - \tilde{y}_0)l + (z_0 - \tilde{z}_0)m}{k^2 + l^2 + m^2} \quad (4.6)$$

gilt.

Für die 15 Punkte, deren Koordinaten in der Tabelle 2 zwischen den Koordinaten der die Gerade (4.4) bestimmenden Punkte angeführt sind, wurden in dieser Weise ihre Abweichungen von der Geraden (4.4) ermittelt.

Die größte Abweichung ist ungefähr $0,0031m$ groß gewesen, die durchschnittliche Abweichung war ungefähr $0,000983m$, die Standardabweichung der Abweichungen war ungefähr $0,000703m$. Solche Abweichungen können auf die unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Kalkulationen zurück geführt werden. Somit bewahrheitet sich auch die Vermutung, dass der geometrische Ort der einem Zahn gehörenden Berührungspunkte eine Gerade darstellt.

Aus den in den Tabellen 1 und 2 aufgeführten Daten folgt, dass sich die zwei die Verzahnung bildenden Schraubenflächen mindestens entlang zwei Geraden berühren. Diese Tatsache spricht dafür, dass die zwei Schraubenflächen in spielloser Verzahnung nicht gegenseitig bewegbar sind, d.h. sie schneiden sich in jeder unzulässigen gegenseitigen Anordnung. Wir schließen daraus, dass die synthetisierte Verzahnung allen aufgestellten Forderungen gerecht wird.

l/m	z/m	x/m	y/m
-2,7	12,157734036	23,29453153	2,182495507
-2,6	11,341408808	23,22140514	1,990638925
-2,5	10,439680332	23,14702759	1,775820774
-2,4	9,577559211	23,07089231	1,57281574
-2,3	8,663843549	22,99224868	1,356358708
-2,2	7,725740393	22,91273267	1,134171697
-2,1	6,781003806	22,82982583	0,9110341477
-2,0	5,791585026	22,74553325	0,6767395115
-1,9	4,775796732	22,65810867	0,4363166616
-1,8	3,738338598	22,56806109	0,1911337347
-1,7	2,649345119	22,47499313	-0,0667411725
-1,6	1,527092989	22,37813482	-0,3322612641
-1,5	0,368492546	22,27801814	-0,60614339
-1,4	-,861032371	22,17264723	-0,8973582123
-1,3	-2,12910422	22,06327926	-1,197184654
-1,2	-3,471338897	21,94724884	-1,514705536
-1,1	-4,902155852	21,82488671	-1,853452064
1,1	4,902155852	21,82488671	1,853452064
1,2	3,471338897	21,94724884	1,514705536
1,3	2,12910422	22,06327926	1,197184654
1,4	0,861032371	22,17264723	0,8973582123
1,5	-0,368492546	22,27801814	0,60614339
1,6	-1,527092989	22,37813482	0,3322612641
1,7	-2,649345119	22,47499313	0,0667411725
1,8	-3,738338598	22,56806109	-0,1911337347
1,9	-4,775796732	22,56468719	-0,4345176876
2,0	-5,791585026	22,74553325	-0,6767395115
2,1	-6,781003806	22,82982583	-0,9110341474
2,2	-7,725740393	22,91273267	-1,134171697
2,3	-8,663843549	22,99224868	-1,356358708
2,4	-9,577559211	23,07089231	-1,57281574
2,5	-10,439680332	23,14702759	-1,775820774
2,6	-11,341408808	23,22140514	-1,990638925
2,7	-12,157734036	23,29453153	-2,182495507

Tabelle 2

5. Grundgleichungen für geradverzahnte Räder

Nachdem der allgemeine Fall der geometrischen Synthese einer Verzahnung zweier Schraubenzahnräder betrachtet ist, betrachten wir die geometrische Synthese einer Verzahnung zweier von zylindrischen Oberflächen begrenzter Zahnräder. Dieses Problem unterscheidet sich wesentlich von dem in den vorhergehenden Kapiteln gelösten Problem, denn die zylindrischen Oberflächen bewegen sich gegeneinander. Aber auch in diesem Falle bewährt sich die Anwendung von Hüllkurven nicht. Es ist ja durchaus nicht notwendig, dass für jeden Punkt irgendeines der Zahnräder eine zulässige gegenseitige Anordnung der beiden existiere, in der es gerade in diesem Punkte von dem anderen Zahnrad berührt wird. Dies bedeutet aber, dass das Profil eines der Zahnräder die vom anderen Profil gebildete Kurvenschar nicht unbedingt einhüllen muss. Statt der Anwendung von Hüllkurven wird das folgende Verfahren der geometrischen Synthese einer Verzahnung zylindrischer Zahnräder mit gleichlaufenden Achsen vorgeschlagen.

Ist das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten zwei verzahnten Räder konstant, so stellen die entsprechenden Polkurven zwei Kreise dar, die ohne zu gleiten aufeinander abrollen. Stoppen wir einen der Kreise, so stellt er die Rastpolbahn dar, während der andere die Gangpolbahn darstellt. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel solch eines Paares von Kreisen mit den Koordinatensystemen, auf die die Kreise bezogen sind. Die vorgeschriebene Bewegung eines dieser Kreise bezüglich des anderen bestimmt die Mengen der zulässigen und der unzulässigen gegenseitigen Anordnungen der entsprechenden Koordinatensysteme. Die Profile der Räder müssen sich in jeder zulässigen gegenseitigen Anordnung berühren, denn sonst schneiden sich die Profile in gewissen unzulässigen Anordnungen nicht. Andererseits muss die Momentangeschwindigkeit des mit dem momentanen Berührungspunkt übereinstimmenden Punkts des an die Gangpolbahn festgebundenen Profils zum an die Rastpolbahn gebundenen Profil tangential sein, denn sonst schneiden sich die Profile in einer zulässigen Anordnung.

Wir nehmen an, dass der Kreis mit dem Mittelpunkt O und Radius R am Koordinatensystem Oxy angebunden ist und die Rastpolbahn darstellt. Der an das Koordinatensystem $O_1x_1y_1$ angebundene Kreis mit dem Mittelpunkt O_1 und Radius r soll die Gangpolbahn darstellen, die auf der Rastpolbahn abrollt. Dies bedeutet, dass $R\dot{\phi} = r\dot{\Psi}$ oder

$$\Psi = \frac{R}{r}\phi \tag{5.1}$$

gilt.

Die folgenden Formeln drücken x und y durch x_1 und y_1 aus:

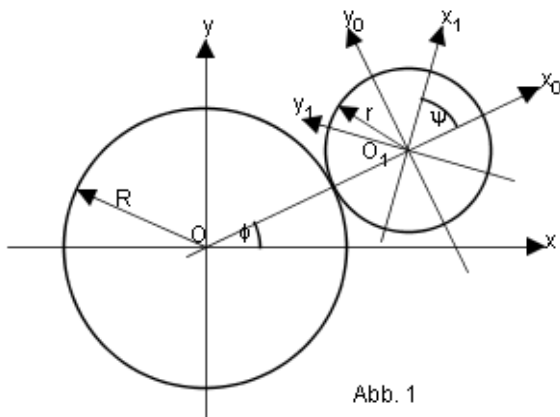


Abb. 1

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) - y_1 \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) + (R+r)\cos\phi \\ y = x_1 \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) + y_1 \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) + (R+r)\sin\phi \end{cases}, \tag{5.2}$$

woraus folgt:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\phi} = -(R+r) \left[\frac{x_1}{r} \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) + \frac{y_1}{r} \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) + \sin\phi \right] \\ \frac{dy}{d\phi} = (R+r) \left[\frac{x_1}{r} \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) - \frac{y_1}{r} \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi\right) + \cos\phi \right] \end{cases} \quad (5.3)$$

Gegeben sei nun im Koordinatensystem Oxy eine Kurve, deren Parametergleichungen

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

sind. Wir fixieren jetzt einen Wert ϕ_0 des Winkels ϕ und nehmen an, dass der an Koordinatensystem $O_1x_1y_1$ angebundene Punkt $P_0(x_1(\phi_0), y_1(\phi_0))$ in entsprechender gegenseitiger Anordnung der beiden Koordinatensysteme mit einem der Kurve (5.4) gehörenden Punkt, sagen wir $P(x(t_0), y(t_0))$, übereinstimmt. Wie erwähnt wurde, muss die Bahnkurve des Punkts P_0 die Kurve (5.4) im Punkte P berühren.

Dies bedeutet aber, dass die Gleichung

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = - \frac{x_1 \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) - y_1 \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + r \cos\phi_0}{x_1 \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + y_1 \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + r \sin\phi_0} \quad (5.5)$$

gelten soll. Vergleicht man (5.5) mit (5.2), sieht man sofort die Vereinfachung

$$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = - \frac{x(t_0) - R \cos\phi_0}{y(t_0) - R \sin\phi_0}. \quad (5.6)$$

Da der Punkt $(R \cos\phi_0, R \sin\phi_0)$ im Koordinatensystem Oxy nichts anderes als den Momentanpol darstellt, folgt aus der Gleichung (5.6), dass für jede zulässige gegenseitige Anordnung der Koordinatensysteme Oxy und $O_1x_1y_1$ alle eventuellen Berührungspunkte Fußpunkte der auf das gegebene Profil aus dem Momentanpol gefällten Lote sind. Es ist bemerkenswert, dass der Radius der Gangpolbahn, an die das gesuchte Profil angebunden sein soll, keine Rolle dabei spielt. Gelingt es aus der Gleichung (5.6) einen dem fixierten Wert ϕ_0 des Winkels ϕ entsprechenden Wert t_0 des Parameters t zu finden, so liefern die Formeln

$$\begin{cases} x_1(\phi_0) = x(t_0) \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + y(t_0) \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) - (R+r) \cos\left(\frac{R}{r}\phi_0\right) \\ y_1(\phi_0) = -x(t_0) \sin\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + y(t_0) \cos\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + (R+r) \sin\left(\frac{R}{r}\phi_0\right) \end{cases} \quad (5.7)$$

die Koordinaten eines eventuellen Punkts des gesuchten Profils im Koordinatensystem $O_1x_1y_1$. Schneidet die Bahnkurve des ermittelten Punkts das gegebene Profil nicht, so kann $(x_1(\phi_0), y_1(\phi_0))$ als ein Punkt des gesuchten Profils akzeptiert werden. Anderenfalls muss man den Punkt als einen untauglichen aussondern. Es ist wiederum ersichtlich, dass mittels einer genügend großen Zahl der ermittelten tauglichen Punkte das gesuchte Profil mit hinreichender Genauigkeit wieder hergestellt werden kann.

Wechseln wir jetzt in der Gleichung (5.6) zu den laufenden Werten der Parameter, so ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$R[x'(t)\cos\phi + y'(t)\sin\phi] = x(t)x'(t) + y(t)y'(t)$$

$$\begin{aligned} & \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \cos\phi + \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \sin\phi = \\ & = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{R\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \end{aligned}$$

$$\sin\left[\phi + \arctan\frac{x'(t)}{y'(t)}\right] = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{R\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}. \quad (5.8)$$

Die Gleichung (5.8) ist genau dann lösbar, wenn die Ungleichheit

$$\left| \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{R\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right| \leq 1 \quad (5.9)$$

erfüllt ist. Ist dies der Fall, so ergibt sich aus (5.8)

$$\phi = \arcsin\frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{R\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} - \arctan\frac{x'(t)}{y'(t)}.$$

Die Gleichung (5.8) erinnert an die Gleichung (2.21). Es stellt der Term

$$\frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

die Projektion des Radiusvektors des Punktes $(x(t), y(t))$ auf die Tangente an die Kurve (5.4) zu diesem Punkte dar, d.h. dasselbe, was der Ausdruck

$$\frac{\rho'(\zeta)\rho(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}}$$

in (2.21) darstellt. Man stellt ebenso leicht fest, dass

$$\zeta + \frac{2\pi}{T}z - \arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}$$

dem Winkel gleich ist, den das an die betrachtete Kurve im gewählten Punkte errichtete Lot mit der Polarachse bildet. Dieser Winkel stimmt mit dem Winkel

$$- \arctan\frac{x'(t)}{y'(t)},$$

überein, den das an die Kurve (5.4) im Punkte $(x(t), y(t))$ errichtete Lot mit der x -Achse bildet.

Wenn wir nochmals die Abbildung 1 betrachten, wird es klar, dass der Momentanpol die Strecke OO_1 im Verhältnis teilt, das genau dem in der Gleichung (2.21) auftretenden Term $\frac{T_1 - T}{T}$ (unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Größen T und T_1) entspricht. Um das zu verdeutlichen, kommen wir auf die Gleichheit (2.5) zurück, aus der folgt, dass

$$k = \frac{T}{T_1}$$

ist und die Übersetzung der Verzahnung mit dem Verhältnis der Schraubengänge der Zahnräder übereinstimmt. Daraus ist zu schließen, dass

$$\frac{T_1 - T}{T} = \frac{1 - k}{k} \text{ ist.}$$

Andererseits gilt für die Außenverzahnung, deren Polkurven die Abbildung 1 darstellt

$$k = -\frac{R}{r},$$

folglich

$$k - 1 = -\frac{R + r}{r}$$

und

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{k}{\frac{R + r}{r}} = \frac{-\frac{R}{r}}{\frac{R + r}{r}} = -\frac{R}{R + r}.$$

Daraus ergibt sich

$$-\frac{R + r}{R} = \frac{T_1 - T}{T}.$$

Da der Betrag $R + r$ der Achsabstand der in Abbildung 1 gezeigten Polkurven ist, entspricht er genau der in der Gleichung (2.21) auftretenden Größe L . Wir stellen fest, dass

$$\frac{T_1 - T}{TL} = -\frac{1}{R} \text{ ist.}$$

Da für jeden Winkel α die Identität

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \equiv \pm \cos \alpha$$

gilt, stimmen die beiden Teile der Gleichungen (2.21) und (5.8) bis auf die Vorzeichen miteinander überein. Deshalb kann die Gleichung (5.8) auf dieselbe Weise wie die Gleichung (2.21) gelöst werden.

Für eine Strecke des gegebenen Profils, die einen Bogen der Kreisevolvente darstellt, deren Gleichungen im Koordinatensystem Oxy

$$\begin{cases} x = r_0 (\cos t + t \sin t) \\ y = r_0 (\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (5.10)$$

sind, gilt

$$\frac{dx}{dt} = r_0 t \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = r_0 t \sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan t,$$

$$\frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{R\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} = \frac{r_0}{R}.$$

Hieraus

$$\arctan \frac{y'(t)}{x'(t)} = t$$

und aus der Gleichung (5.8) ergibt sich

$$\phi = t \pm \arccos \frac{r_0}{R} \quad \text{oder} \quad t = \phi \mp \arccos \frac{r_0}{R}. \quad (5.11)$$

Die Formeln (5.11) bestimmen den Zusammenhang des Abwälzwinkels ϕ und des Wertes des Parameters t . Man erhält nämlich von diesen Formeln für den Abwälzwinkel ϕ die Werte des Parameters t , die jenen Punkten des gegebenen Profils entsprechen, in denen dasselbe in der von ϕ bestimmten gegenseitigen Anordnung der Koordinatensysteme vom Gegenprofil berührt werden kann. Auch umgekehrt findet man für einen gewissen t Wert die entsprechenden ϕ Werte.

Ersetzt man in (5.7) $x(t_0)$ und $y(t_0)$ durch die entsprechenden Terme für x und y aus den Gleichungen (5.10), wobei t z.B. durch den Ausdruck $\phi - \arccos \frac{r_0}{R}$, ϕ aber seinerseits durch $\frac{r}{R}\Psi$ ersetzt wird, so ergeben sich die parametrischen Gleichungen (5.12, siehe nächste Seite) mit dem Parameter Ψ , die im Koordinatensystem $O_1x_1y_1$ das zum gegebenen Profil gesuchte Gegenprofil darstellen.

Aus (5.12) folgen die Formeln (5.13a) und (5.13b) (siehe Seite 37), die die Koordinaten des Punktes $(x_1(\Psi), y_1(\Psi))$ im Koordinatensystem darstellen, dessen Ursprung mit dem Punkt O_1 übereinstimmt und das relativ zum Koordinatensystem $O_1x_0y_0$ um den Winkel $\arccos \frac{r_0}{R}$ im Uhrzeigersinn gedreht ist. Diese Formeln sind nichts anderes als die Gleichungen einer Evolvente des Kreises mit dem Mittelpunkt O_1 und dem Radius $\frac{r_0 r}{R}$, was mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Gleichungen (5.8) und (2.21) auch zu erwarten war. Wir sind zu diesem Ergebnis gekommen ohne Hüllkurven verwendet zu haben.

$$\left. \begin{aligned}
 x_1(\Psi) &= r_0 \left[\cos\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) + \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \sin\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] \times \\
 &\quad \cos\left(\frac{R+r}{R}\Psi\right) + \\
 &\quad r_0 \left[\sin\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) - \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \cos\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] \times \\
 &\quad \sin\left(\frac{R+r}{R}\Psi\right) - \\
 &\quad (R+r)\cos\Psi = \\
 &= r_0 \left[\cos\left(\Psi + \arccos\frac{r_0}{R}\right) - \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \sin\left(\Psi + \arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] - \\
 &\quad (R+r)\cos\Psi; \\
 y_1(\Psi) &= -r_0 \left[\cos\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) + \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \sin\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] \times \\
 &\quad \sin\left(\frac{R+r}{R}\Psi\right) + \\
 &\quad r_0 \left[\sin\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) - \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \cos\left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] \times \\
 &\quad \cos\left(\frac{R+r}{R}\Psi\right) + \\
 &\quad (R+r)\sin\Psi = \\
 &= -r_0 \left[\sin\left(\Psi + \arccos\frac{r_0}{R}\right) + \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \cos\left(\Psi + \arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] + \\
 &\quad (R+r)\sin\Psi,
 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & x_1(\Psi) \cos\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) - y_1(\Psi) \sin\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) = \\
 & = r_0 \left[\cos\Psi - \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \sin\Psi \right] - (R+r) \cos\left(\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) = \\
 & = r_0 \cos\Psi - \frac{r_0 r}{R} \Psi \sin\Psi + r_0 \arccos\frac{r_0}{R} \sin\Psi - (R+r) \frac{r_0}{R} \cos\Psi - \\
 & \quad (R+r) \sin\Psi \sin\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) = \\
 & = -\frac{r_0 r}{R} (\cos\Psi + \Psi \sin\Psi) + \left[r_0 \arccos\frac{r_0}{R} - (R+r) \sin\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] \sin\Psi; \quad (5.13a) \\
 & x_1(\Psi) \sin\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) + y_1(\Psi) \cos\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) = \\
 & = -r_0 \left[\sin\Psi + \left(\frac{r}{R}\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) \cos\Psi \right] + (R+r) \sin\left(\Psi - \arccos\frac{r_0}{R}\right) = \\
 & = -r_0 \sin\Psi - \frac{r_0 r}{R} \Psi \cos\Psi + r_0 \arccos\frac{r_0}{R} \cos\Psi + (R+r) \frac{r_0}{R} \sin\Psi - \\
 & \quad (R+r) \cos\Psi \sin\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) = \\
 & = \frac{r_0 r}{R} (\sin\Psi - \Psi \cos\Psi) + \left[r_0 \arccos\frac{r_0}{R} - (R+r) \sin\left(\arccos\frac{r_0}{R}\right) \right] \cos\Psi. \quad (5.13b)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Auch die Ergebnisse der auf der Verwendung von Fourierreihen basierenden Lösung des betrachteten Problems sollen gezeigt werden. Es gibt dazu folgende Gründe. In der oben angeführten Lösung wurde der Umstand nicht berücksichtigt, dass das gesuchte Gegenprofil nur einen eingeschränkten Bogen der gegebenen Kreisevolvente berühren darf. Es war andererseits nicht möglich festzustellen, dass mehr als ein Paar Zähne gleichzeitig miteinander in Berührung sein können. Man kann außerdem nicht sicher sein, dass auch im Falle eines von der Kreisevolvente verschiedenen Zahnprofils die Ermittlung der Lösung des Problems in einer geschlossenen Form gelingt. Die erwähnten Nachteile und Schwierigkeiten können bei der Verwendung von Fourierreihen beseitigt werden.

Es wurde bei der Verwendung von Fourierreihen nicht vom Parameter t , sondern vom Wälzwinkel ϕ ausgegangen, um sicher zu sein, dass sich für jeden Wert des Wälzwinkels ein entsprechender Berührungspunkt des gegebenen und des gesuchten Profils finden lässt.⁵

Die Ermittlung der entsprechenden Werte⁶ des Parameters t hatte nach der Lösung einer transzendenten Gleichung verlangt, die mittels eines einfachen Näherungsverfahrens gelöst wurde.

Wie es auch zu erwarten war, wurden für jeden der ausgewählten Werte des Wälzwinkels ϕ mehrere (und zwar bis 8) verschiedene Werte des Parameters t ermittelt, von denen einige ausgesondert werden mussten, da die Bahnkurven der entsprechenden Punkte des gesuchten Profils das gegebene Profil kreuzten.⁷

Die Ergebnisse dieser Berechnungen wurden in Tabelle 3 in den vier breiten Spalten zusammengefasst, von denen jede die x_1 und y_1 Koordinaten einer und derselben Kreisevolvente gehörenden Punkte enthält. Die 15 Zeilen dieser Tabelle entsprechen den ausgewählten Werten des Wälzwinkels ϕ , die in der linken (schmalen) Spalte angeführt sind. Jedes von den Kreuzungen der Zeilen und der breiten Spalten gebildete Feld ist entweder frei gelassen oder in drei ausgefüllte Subfelder unterteilt worden. Ein unausgefülltes Feld bedeutet,

⁵ Für die gegenseitig unbeweglichen Schraubenflächen war diese Frage gegenstandslos.

⁶ Im allgemeinen entsprechen jedem Wert des Wälzwinkels ϕ mehr als ein Wert des Parameters t .

⁷ Dies wurde anhand des im Kapitel 4. verwendeten Verfahrens festgestellt.

dass für den der Zeile entsprechenden Wert des Wälzwinkels kein tauglicher Punkt der der Spalte entsprechenden Kreisevolvente gefunden werden konnte. Ist ein Feld ausgefüllt, so enthält sein oberes Subfeld einen ermittelten Wert des Parameters t , die zwei unteren Subfelder aber enthalten die Koordinaten des entsprechenden Punkts des gesuchten Profils, wie es in der Überschrift der Tabelle gezeigt ist.

Die Überprüfung der Tatsache, dass alle Punkte, deren Koordinaten in einer und derselben breiten Spalte der Tabelle enthalten sind, ein- und derselben Kreisevolvente gehören, unterscheidet sich von der im vorigen Kapitel angeführten nicht. Man überzeugt sich ebenso leicht, dass der Abstand zwischen den Punkten der Zweige 2 und 3, die demselben Wälzwinkel entsprechen, vom letzteren praktisch unabhängig ist. Das bedeutet, dass die Punkte dieser Zweige äquidistanten Kreisevolventen gehören. Dasselbe gilt für die Zweige 1 und 4. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, findet die Berührung der beiden Profile bei jeder zulässigen gegenseitigen Anordnung mindestens an drei Punkten statt, wobei mindestens zwei dieser Punkte zu Kreisevolventen gehören, die nicht äquidistant sind. Daraus folgt, dass sich die ermittelten Profile in jeder unzulässigen gegenseitigen Anordnung schneiden. Damit ist eine korrekt funktionierende Verzahnung synthetisiert worden.

ϕ	Zweig 1		Zweig 2		Zweig 3		Zweig 4	
	l/m		l/m		l/m		l/m	
	x_1/m	y_1/m	x_1/m	y_1/m	x_1/m	y_1/m	x_1/m	y_1/m
0,00	1,4698		-1,4698		3,7495			
	-30,2534	0,6935	-30,2534	-0,6935	-29,2442	2,081		
0,01	1,5402		-1,4014		3,8473			
	-30,1769	0,7211	-30,3315	-0,6647	-29,3024	2,102		
0,02	1,6131		-1,3349		3,9414			
	-30,1014	0,7477	-30,411	-0,6348	-29,3591	2,1235		
0,03	1,6879		-1,2709		4,0354			
	-30,0266	0,7732	-30,4916	-0,6038	-29,4194	2,1467		
0,04	1,7652		-1,2083		4,1269			
	-29,9534	0,7977	-30,5736	-0,5713	-29,4805	2,1708		
0,05	1,8445		-1,1486		4,217			
	-29,8815	0,8211	-30,6562	-0,538	-29,5437	2,1962		
0,06	1,9258		-1,0905		4,3046		7,3785	
	-29,8114	0,8436	-30,7411	-0,5032	-29,6075	2,2226	-30,6957	3,6600
0,07	2,0084		-1,0348		4,3897		7,4318	
	-29,7432	0,8647	-30,8261	-0,4673	-29,6725	2,2499	-30,6061	3,6878
0,08	2,0946		-0,9811		4,4729		7,4879	
	-29,6747	0,8853	-30,9129	-0,4301	-29,7387	2,2784	-30,5167	3,7147
0,09	2,1811				4,5546		7,5461	
	-29,6097	0,9045			-29,8072	2,3082	-30,4294	3,7404
0,10	2,2712				4,6338		7,6062	
	-29,544	0,9231			-29,876	2,3391	-30,3431	3,765
0,11	2,3633				4,7101		7,6683	
	-29,4803	0,9408			-29,9455	2,3708	-30,2585	3,7884
0,12	2,4579				4,785		7,7329	
	-29,4178	0,9577			-30,0168	2,404	-30,1749	3,811
0,13	2,5532				4,8578		7,7994	
	-29,3581	0,9734			-30,0895	2,4385	-30,0928	3,8324
0,14	2,6517				4,9282		7,8678	
	-29,2987	0,9885			-30,1629	2,474	-30,0122	3,8528

Tabelle 3.

6. Über die geometrische Bedeutung der in vorigen Kapiteln abgeleiteten Gleichungen

Die Gleichung (5.6) kann als eine die veränderlichen t_0 und ϕ_0 verbindende implizite Funktion aufgefasst werden. Deshalb ist der Begriff einer entsprechenden (im allgemeinen mehrdeutigen) expliziten Funktion $t = t(\phi)$ korrekt.

Es entspreche dem Wert ϕ_0 des Wälzwinkels ein eventueller Berührungspunkt

$$(x[t(\phi_0)], y[t(\phi_0)]), \quad (6.1)$$

dem Wert $\phi_0 + \Delta\phi$ aber ein benachbarter eventueller Berührungspunkt

$$(x[t(\phi_0 + \Delta\phi)], y[t(\phi_0 + \Delta\phi)]). \quad (6.2)$$

Ist $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$, so entspricht im Koordinatensystem $O_1x_1y_1$ dem Punkt (6.2) ein Punkt, dessen Koordinaten aus den Formeln (5.7) ermittelt werden können. Sie ergeben sich als

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(\phi_0 + \Delta\phi) = x[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\cos\left[\frac{R+r}{r}(\phi_0 + \Delta\phi)\right] + y[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\sin\left[\frac{R+r}{r}(\phi_0 + \Delta\phi)\right] - \\ \quad (R+r)\cos\left[\frac{R}{r}(\phi_0 + \Delta\phi)\right] \\ y_1(\phi_0 + \Delta\phi) = -x[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\sin\left[\frac{R+r}{r}(\phi_0 + \Delta\phi)\right] + y[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\cos\left[\frac{R+r}{r}(\phi_0 + \Delta\phi)\right] + \\ \quad (R+r)\sin\left[\frac{R}{r}(\phi_0 + \Delta\phi)\right]. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Kehrt man nun zum Wälzwinkel ϕ_0 zurück, so kann man aus den Formeln (5.2) die Lage des Punktes bezüglich des Koordinatensystems Oxy ermitteln, mit dem der Punkt (6.3) jetzt übereinstimmt, und zwar:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\Delta\phi) = x_1(\phi_0 + \Delta\phi)\cos\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) - y_1(\phi_0 + \Delta\phi)\sin\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + (R+r)\cos\phi_0 = \\ \quad = x[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\cos\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + y[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\sin\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) - \\ \quad (R+r)\cos\left(\frac{R}{r}\Delta\phi - \phi_0\right) + (R+r)\cos\phi_0 \\ y(\Delta\phi) = x_1(\phi_0 + \Delta\phi)\sin\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + y_1(\phi_0 + \Delta\phi)\cos\left(\frac{R+r}{r}\phi_0\right) + (R+r)\sin\phi_0 = \\ \quad = -x[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\sin\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + y[t(\phi_0 + \Delta\phi)]\cos\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + \\ \quad (R+r)\sin\left(\frac{R}{r}\Delta\phi - \phi_0\right) + (R+r)\sin\phi_0. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Durchläuft $\Delta\phi$ eine (genügend kleine) Umgebung der Null, so umschreibt der Punkt (6.4) bezüglich des Koordinatensystems Oxy einen Bogen, der den Punkt (6.1) enthält. Übergeht man in den Formeln (6.4) die Zwischenergebnisse, so entstehen die parametrischen Gleichungen dieses Bogens, in denen $\Delta\phi$ die Rolle des Parameters spielt. Dieser Bogen stellt aber nichts anderes als eine Strecke des gesuchten Gegenprofils

dar, die durch den Punkt (6.1) geht. Die Steigung dieser Kurve kann als $\frac{dy(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} / \frac{dx(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)}$ ermittelt werden. Wir schreiben dazu die Terme für die beiden Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{dx(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} &= \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0+\Delta\phi)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0+\Delta\phi} \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) - x[t(\phi_0+\Delta\phi)] \frac{R+r}{r} \sin\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + \\ &\frac{dy}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0+\Delta\phi)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0+\Delta\phi} \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + y[t(\phi_0+\Delta\phi)] \frac{R+r}{r} \cos\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + \\ &\frac{R}{r}(R+r) \sin\left(\frac{R}{r}\Delta\phi - \phi_0\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} &= \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0+\Delta\phi)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0+\Delta\phi} \cdot \sin\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) - x[t(\phi_0+\Delta\phi)] \frac{R+r}{r} \cos\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + \\ &\frac{dy}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0+\Delta\phi)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0+\Delta\phi} \cdot \cos\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) - y[t(\phi_0+\Delta\phi)] \frac{R+r}{r} \sin\left(\frac{R+r}{r}\Delta\phi\right) + \\ &\frac{R}{r}(R+r) \cos\left(\frac{R}{r}\Delta\phi - \phi_0\right). \end{aligned}$$

Setzt man in den vorigen Formeln $\Delta\phi = 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dx(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} \Big|_{\Delta\phi=0} &= \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + \frac{R+r}{r} \{y[t(\phi_0)] - R \sin \phi_0\}, \\ \frac{dy(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} \Big|_{\Delta\phi=0} &= \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0} - \frac{R+r}{r} \{x[t(\phi_0)] - R \cos \phi_0\}. \end{aligned}$$

Aus der letzten Formel folgt mit Rücksicht auf die Gleichung (5.6)

$$\begin{aligned} \frac{dy(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} \Big|_{\Delta\phi=0} &= \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + \frac{R+r}{r} \frac{dy}{dx} \Big|_{t=t(\phi_0)} \{y[t(\phi_0)] - R \sin \phi_0\} = \\ &= \frac{dy}{dx} \Big|_{t=t(\phi_0)} \left\{ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t(\phi_0)} \cdot \frac{dt}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + \frac{R+r}{r} \{y[t(\phi_0)] - R \sin \phi_0\} \right\}. \end{aligned}$$

So ist die Steigung der Kurve (6.4) im Punkt (6.1)

$$\frac{\frac{dy(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} \Big|_{\Delta\phi=0}}{\frac{dx(\Delta\phi)}{d(\Delta\phi)} \Big|_{\Delta\phi=0}} = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=t(\phi_0)}, \quad (6.5)$$

und stimmt mit der Steigung des gegebenen Profils überein.

Somit ist der Satz bewiesen: Sind alle Punkte eines (genügend kleinen) Bogens des gegebenen Profils eventuelle Berührungspunkte und geht in einer zulässigen gegenseitigen Anordnung der Zahnräder das ermittelte

Profil durch einen dieser Punkte, so berühren sich (haben eine gemeinsame momentane Tangente) in diesem Punkt das gegebene Profil und das ermittelte.⁸

Im Fall der gegenseitig unbeweglichen Schraubenflächen ist die Existenz der gemeinsamen Tangente offenbar gewesen, da die gesuchte Oberfläche von Schraubenlinien gebildet wurde, die alle die gegebene Oberfläche berühren sollten. Für die gegenseitig beweglichen Zylinder muss die Tatsache bewiesen werden, da man über das gesuchte Profil nichts im Voraus behaupten kann.

Nachdem die Existenz der gemeinsamen Tangente festgestellt ist, kann man sich den geometrischen Sinn der Gleichungen (2.21) und (5.8) klarmachen. Wir schreiben nämlich die Gleichung (2.21) als

$$\frac{k}{1-k} L \sin \left[\arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z \right) \right] = \rho(\zeta) \sin \left[\arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \quad (6.6)$$

um und betrachten die Abbildung 2. Auf dieser Abbildung sollen die Kreise, deren Mittelpunkte O bzw. O_1 sind, die Polbahnen, der Punkt P aber den Momentanpol einer Verzahnung zweier zylindrischen Räder darstellen. C sei der momentane Berührungspunkt der Zähne der Räder, die durch die Punkte Q und Q_1 verlaufende Gerade aber die momentane gemeinsame Tangente. Verläuft die Gerade AB durch C senkrecht zum Radiusvektor OC , so gilt

$$\alpha = \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}.$$

Hieraus folgt, dass der rechte Teil der Gleichung (6.6) nichts anderes als die Projektion CQ des Radiusvektors OC auf die momentane gemeinsame Tangente darstellt. Die Koordinatenachsen können immer so gewählt werden, dass

$$\beta = \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} z \right)$$

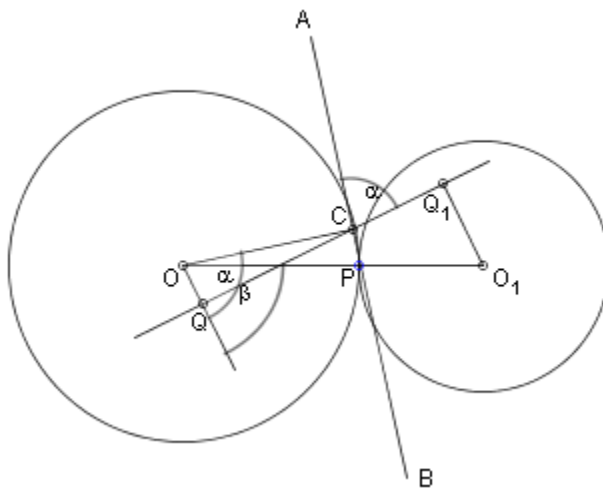


Abb. 2

gilt. Andererseits ist $L \sin \beta$ gleich der Projektion QQ_1 des Achsabstandes OO_1 auf die momentane gemeinsame Tangente. Somit drückt die Gleichung (6.6) die geometrische Beziehung

⁸ Dabei ist die Möglichkeit keineswegs ausgeschlossen, dass sich die beiden Profile im selben Punkt schneiden.

$$\frac{k}{1-k} \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{CQ}$$

aus. Es gilt folglich

$$\overrightarrow{CQ_1} = \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{QQ_1} = \frac{1}{1-k} \overrightarrow{QQ_1}$$

oder

$$\overrightarrow{CQ} = k \overrightarrow{CQ_1}.$$

Somit lässt sich der Satz formulieren: Bilden zwei Schraubenzahnräder mit gleichlaufenden Achsen eine reguläre Verzahnung, so teilt in jeder zu diesen Achsen senkrechten Ebene der Berührungspunkt die Projektion des Achsabstandes auf die gemeinsame Tangente im Verhältnis, das der Übersetzung der Verzahnung gleich ist. Im Falle zylindrischen Zahnräder gilt dies für momentane Tangenten und momentane Berührungspunkte. Da der Momentanpol im derselben Verhältnis den Achsabstand teilt, kann im letzteren Falle der Satz auch anders lauten und zwar: Bilden zwei zylindrische Zahnräder mit gleichlaufenden Achsen eine reguläre Verzahnung, so stimmt die Projektion des Momentanpols auf die momentane gemeinsame Tangente immer mit dem momentanen Berührungspunkt überein.

7. Nochmals über den Fall des kreisevolventigen Zahnprofils

Es wurde am Ende des 4. Kapitels festgestellt, dass das Gegenprofil der gegebenen Kreisevolvente einer Kreisevolvente ganz nah ist. Es wurde außerdem festgestellt, dass der geometrische Ort der Berührungspunkte der beiden die synthetisierte Verzahnung bildenden (miteinander im Eingriff stehenden) Zahnräder einer Geraden ganz nah ist. Wir beweisen jetzt, dass es sich bei diesen beiden Ergebnissen um keinen Zufall handelt, und, dass zwangsläufig das Gegenprofil eine Kreisevolvente, aber der geometrische Ort der Berührungspunkte eine Gerade darstellen müssen.

Wir ersetzen deswegen in den Gleichungen (2.1) den Parameter z durch den im 2. Kapitel gewonnenen Ausdruck

$$\frac{T}{2\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{T_1 - T}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} \rho'(\zeta) \rho(\zeta) \right] + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta \right\}.$$

Daraus ergeben sich die allgemein (für beliebige $\rho(\zeta)$) geltenden Gleichungen

$$\begin{cases} x = \rho(\zeta) \cos \left[\arcsin \frac{(T_1 - T) \rho'(\zeta) \rho(\zeta)}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \\ y = \rho(\zeta) \sin \left[\arcsin \frac{(T_1 - T) \rho'(\zeta) \rho(\zeta)}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right], & (7.1) \\ z = \frac{T}{2\pi} \left[\arcsin \frac{(T_1 - T) \rho'(\zeta) \rho(\zeta)}{T L \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta \right] \end{cases}$$

die die Linie bestimmen, in deren Punkten die Berührung der die Verzahnung bildenden Schraubenflächen stattfinden kann (doch nicht unbedingt muss).

Betrachten wir jetzt den Fall, dass $\rho(\zeta)$ ($\zeta_0 < \zeta < \zeta_1$) einen Bogen einer Kreisevolvente, und zwar die Flanke eines Zahnradzahnes, in Polarkoordinaten darstellt. Wir wechseln dabei zu den parametrischen Gleichungen

$$\begin{cases} x = r(\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ y = r(\sin \phi - \phi \cos \phi) \end{cases} \quad (7.2)$$

der Kreisevolvente in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Wälzwinkel ϕ als Parameter. Da wir offenbar nur eine Flanke des Zahnes zu betrachten brauchen, decken die Gleichungen (7.2) alle unsere weiteren Bedürfnisse ab. Es gelten bei dieser Einschränkung, wie am Ende des 3. Kapitels bemerkt wurde, die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \rho(\zeta) &= r\sqrt{1+\phi^2}, \\ \frac{\rho'(\zeta)\rho(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} &= r \operatorname{sign} \rho'(\zeta), \\ \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} &= \frac{\pi}{2} - \arctan \phi, \\ \zeta &= \phi - \arctan \phi + \tilde{\zeta}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\zeta}$ den dem Anfangspunkt der Evolvente entsprechenden Polarwinkel bezeichnet.

Nehmen wir an, dass für die betrachtete Zahnflanke $\rho'(\zeta) > 0$ gilt, und benennen wir

$$\alpha = \arcsin \frac{(T_1 - T)r}{TL} + \frac{\pi}{2},$$

so ergeben sich aus den bekannten Formeln der Trigonometrie die Gleichungen (7.3).

Somit sind alle drei Veränderlichen x, y, z lineare Funktionen eines Parameters ϕ , und (7.3) stellen drei parametrische Gleichungen einer Geraden dar. Um zu beweisen, dass das Gegenprofil eine Kreisevolvente darstellt, gehen wir davon aus, dass eine Zahnflanke des zu ermittelnden Zahnrades als Resultat einer Schraubung der Geraden (7.3) um die Gerade

$$\begin{cases} x = L \\ y = 0 \end{cases}$$

(die Achse O_1z_1) betrachtet werden kann.

$$\begin{cases} x = \rho(\zeta) \cos \left[\arcsin \frac{(T_1 - T)\rho'(\zeta)\rho(\zeta)}{TL\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] = \\ = r\sqrt{1+\phi^2} \cos \left[\arcsin \frac{(T_1 - T)r}{TL} + \frac{\pi}{2} - \arctan \phi \right] = r(\cos \alpha + \phi \sin \alpha) \\ y = \rho(\zeta) \sin \left[\arcsin \frac{(T_1 - T)\rho'(\zeta)\rho(\zeta)}{TL\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] = \\ = r\sqrt{1+\phi^2} \sin \left[\arcsin \frac{(T_1 - T)r}{TL} + \frac{\pi}{2} - \arctan \phi \right] = r(\sin \alpha - \phi \cos \alpha) \\ z = \frac{T}{2\pi} \left[\arcsin \frac{(T_1 - T)\rho'(\zeta)\rho(\zeta)}{TL\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta \right] = \\ = \frac{T}{2\pi} (\alpha - \phi - \tilde{\zeta}) \end{cases} \quad (7.3)$$

Der Schraubengang soll dabei T_1 sein. Wechseln wir zum Koordinatensystem $O_1 x_1 y_1 z_1$, so sind die Gleichungen der Geraden (7.3)

$$\begin{cases} x_1 = r(\cos \alpha + \phi \sin \alpha) - L \\ y_1 = r(\sin \alpha - \phi \cos \alpha) \\ z_1 = \frac{T}{2\pi}(\alpha - \phi - \tilde{\zeta}) \end{cases} \quad (7.4)$$

Versetzt man die Gerade (7.4) in die oben erwähnte Schraubung, so entsteht eine Schraubenfläche, deren Gleichungen im Koordinatensystem $O_1 x_1 y_1 z_1$

$$\begin{cases} x_1 = r(\cos \alpha + \phi \sin \alpha) \cos \varphi - r(\sin \alpha - \phi \cos \alpha) \sin \varphi - L \cos \varphi \\ y_1 = r(\cos \alpha + \phi \sin \alpha) \sin \varphi + r(\sin \alpha - \phi \cos \alpha) \cos \varphi - L \sin \varphi \\ z_1 = \frac{T}{2\pi} \left(\alpha - \phi - \tilde{\zeta} + \frac{T_1}{T} \varphi \right) \end{cases} \quad (7.5)$$

oder

$$\begin{cases} x_1 = r[\cos(\varphi + \alpha) + \phi \sin(\varphi + \alpha)] - L \cos \varphi \\ y_1 = r[\sin(\varphi + \alpha) - \phi \cos(\varphi + \alpha)] - L \sin \varphi \\ z_1 = \frac{T}{2\pi} \left(\alpha - \phi - \tilde{\zeta} + \frac{T_1}{T} \varphi \right) \end{cases} \quad (7.6)$$

sind. ϕ und φ sind zwei unabhängige Parameter.

Offenbar sind alle zur $O_1 z_1$ -Achse senkrechten Querschnitte der Schraubenfläche (7.6) einander kongruent. Deshalb reicht die Ermittlung eines beliebigen dieser Querschnitte aus. Unter anderem auch des dem Wert

$$z_1 = -\frac{T}{2\pi} \left(\frac{T_1 - T}{T} \alpha + \tilde{\zeta} \right)$$

entsprechenden Querschnitts. Ist aber diese Gleichheit erfüllt, so gilt

$$\phi = \frac{T_1}{T}(\varphi + \alpha).$$

Es gilt außerdem
$$L = \frac{(T_1 - T)r}{T \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha}.$$

Es ergibt sich nach der Substitution der zwei letzteren Ausdrücke in (7.6):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \left[\cos(\varphi + \alpha) + \frac{T_1}{T}(\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \alpha) \right] + \frac{(T_1 - T)}{T \cos \alpha} \cos \varphi = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\cos(\varphi + \alpha) + (\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \alpha) \right] + r \cos(\varphi + \alpha) - \frac{T_1}{T} r \cos(\varphi + \alpha) + \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} \cos \varphi = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\cos(\varphi + \alpha) + (\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \alpha) \right] - \frac{(T_1 - T)r}{T} \cos(\varphi + \alpha) + \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} \cos \varphi = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\cos(\varphi + \alpha) + (\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \alpha) \right] - \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} (\cos \varphi \cos^2 \alpha - \sin \varphi \sin \alpha \cos \alpha - \cos \varphi) = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\cos(\varphi + \alpha) + (\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \alpha) \right] + \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} (\cos \varphi \sin^2 \alpha + \sin \varphi \sin \alpha \cos \alpha) = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\cos(\varphi + \alpha) + (\varphi + \alpha)\sin(\varphi + \alpha) \right] + \frac{(T_1 - T)r}{T} \operatorname{tg} \alpha \sin(\varphi + \alpha), \tag{7.7a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 &= r \left[\sin(\varphi + \alpha) - \frac{T_1}{T}(\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) \right] + \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} \sin \varphi = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\sin(\varphi + \alpha) - (\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) \right] + r \sin(\varphi + \alpha) - \frac{T_1}{T} r \sin(\varphi + \alpha) + \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} \sin \varphi = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\sin(\varphi + \alpha) - (\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) \right] - \frac{(T_1 - T)r}{T} \sin(\varphi + \alpha) + \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} \sin \varphi = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\sin(\varphi + \alpha) - (\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) \right] - \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} (\sin \varphi \cos^2 \alpha + \cos \varphi \sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi) = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\sin(\varphi + \alpha) - (\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) \right] - \frac{(T_1 - T)r}{T \cos \alpha} (\cos \varphi \sin \alpha \cos \alpha - \sin \varphi \sin^2 \alpha) = \\
 &= \frac{T_1}{T} r \left[\sin(\varphi + \alpha) - (\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) \right] - \frac{(T_1 - T)r}{T} \operatorname{tg} \alpha \cos(\varphi + \alpha). \tag{7.7b}
 \end{aligned}$$

Die gewonnenen Ausdrücke sind nichts anderes als parametrische Gleichungen einer Kreisevolvente, wobei der Radius des zu entwickelnden Kreises $\frac{T_1}{T} r$ ist. Damit ist alles bewiesen, was zu beweisen war.

Die beiden soeben bewiesenen Behauptungen sind auch in der Fachliteratur zu finden. Doch die Beweise scheinen mehr spekulativ als formal zu sein. Die nun angeführten formalen Beweise bekräftigen die Allgemeinheit des in diesem Werk entwickelten Verfahrens.

8. Literaturverzeichnis

- [1] Sperling, F.: *Über die analytische Behandlung des allgemeinen Verzahnungsproblems bei beliebiger Lage der Drehachsen*. Dissertation, 1959.
- [2] Häussler, U.: *Generalisierte Berechnung räumlicher Verzahnungen und ihre Anwendung auf Wälzfräserherstellung und Wälzfräsen*, 1999.
- [3] Faydor L. Litvin: *Theory of Gearing*, 1989.
- [4] David B. Dooner, Ali A. Seireg: *The kinematic geometry of gearing*, 1995.
- [5] Brandner, G.: *Räumliche Verzahnungen*. Dissertation, 1981.
- [6] *A general theory of the kinematics and geometry of gears in three dimensions*. By A. Dyson, 1969.
- [7] *A geometric theory of conjugate tooth surfaces*. By Wu Da-ren, Luo Jia-shun, 1992
- [8] Hirschmann, K.-H. *Beitrag zur Berechnung der Geometrie von evolventen Verzahnungen*. Dissertation, 1977.
- [9] Steffens, R. *Die Profilsteigungsfunktion ein neuer Weg zur analytischen Bestimmung und Optimierung allgemeiner Profilflankenpaarungen*. Dissertation, 1993.
- [10] Hoschek, J. *Zur Ermittlung von Hüllgebilden in der Kinematik*. Dissertation, 1964.