



FRACMO

BESTIMMUNG VON FRAKTALEN EINHÜLLENDE RAUMBEREICHEN FÜR FAMILIEN VON DREIDI- MENSIONALEN KURVEN

LAUFZEIT: 01.10.19-30.09.20

TECHNISCHE HOCHSCHULE NÜRNBERG
GEORG SIMON OHM

Gefördert durch

Bayerisches Staatsministerium für
Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst



Monsterkurven sind fraktale Objekte, die durch Wiederholung ihres Konstruktionsverfahrens jeden Punkt einer Fläche erreichen und die Fläche vollständig ausfüllen. Seit 2013 forscht Prof. Dr. Jörg Arndt in der Fakultät efi der Technischen Hochschule Nürnberg an diesen flächenfüllenden Kurven.

Ausgangslage

Die ersten flächenfüllenden Kurven bestimmte Giuseppe Peano im Jahr 1890 und David Hilbert 1891. Für diese zweidimensionalen Kurven gibt es auch dreidimensionale Äquivalente und stellen die einzigen flächenfüllenden Kurven dar, deren Menge von Endpunkten auf einem Kristallgitter liegen. Die einhüllenden Raumbereiche sind einfache Würfel, die trivial selbstähnlich sind: ein Würfel kann in acht kleinere Würfel zerlegt werden. Die Existenz dreidimensionaler Kurven mit erheblich interessanteren einhüllenden Raumbereichen ist bekannt, der Rand dieser Raumstücke wird fraktal sein (eine Dimension größer zwei besitzen), jedoch ist kein einziges Beispiel für solch eine Kurve bekannt. Das Projekt „Bestimmung von fraktalen einhüllenden Raumbereichen für Familien von dreidimensionalen Kurven.“ will daher die ersten Beispiele dreidimensionaler Kurven in diesen Raumbereichen angeben.

Projektverlauf

Um dies zu ermöglichen, konzentriert sich die Such zunächst auf die Raumbereiche in denen sich diese befinden. Die Charakterisierung dieser Raumbereiche kann mittels eines Iterated Function System (IFS) stattfinden, dessen Fixpunkt sie sind, eine Art der Fraktalkonstruktion, erfunden von John Hutchinson im Jahr 1981. Die Forderung hierbei, alle linearen Teile der affinen Abbildung sollen eine identische Drehstreckung sein. Dies ist äquivalent zu einer strengen Selbstähnlichkeit der Raumbereiche, nicht nur einer Selbstaffinität. Damit liegen die Endpunkte der Liniensegmente der Kurven auf einem Kristallgitter. Die Beschränkung liegt hierbei auf kubische Gitter, die Raumbereiche sollen vom Geschlecht Null sein. Von 2013 bis 2017 konnte Prof. Dr. Jörg Arndt bereits flächenfüllende

Kurven im zweidimensionalen Raum erfolgreich bestimmen. Die Anzahl der bekannten Kurven stieg in dem Projekt „Bestimmung aller flächenfüllenden Kurven für einfache Lindenmayer-Systeme kleiner Ordnungen“ von etwa 3800 auf viele Millionen. Dieses Projekt soll nun klären, ob und wie sich Eigenschaften der ebenen Kurven auf räumliche Kurven übertragen lassen. Speziell Kurven, die andere Raumstücke als den Würfel ausfüllen. Die Existenz dieser nichttrivialen Kurven im Raum zeigte sich bereits, jedoch ließ sich bisher keine Kurve angeben. „Von Hand“, siehe Abbildung, ließen sich Beispiele für selbstähnliche Raumbereiche im kubischen Gitter finden. Diese Raumstücke umhüllen raumfüllende Kurven. Automatisiert soll nun durch eine eigens geschriebene Software die Suche stattfinden, mit der Implementierung des Kerns der Software in der Sprache C++. Die erste Stufe dieser Software bestimmt alle in Frage kommenden Iterated Function Systems bis zu einer gewissen Anzahl von Abbildungen. Die zweite Stufe verwirft Duplikate bereits bestimmter Raumbereiche.

Projektziel

Das Ziel dieses Projekts ist es, die ersten Beispiele dreidimensionaler Kurven in diesen Raumbereichen anzugeben. Für jeden gefundenen Raumbereich existieren eine Vielzahl von Kurven, diese sind die Eulerkreise im implizierten Graphen im Inneren des Raumbereiches. Zuletzt soll die Bestimmung wie im zweidimensionalen Fall auf angenehme Art der Darstellung der Kurven erfolgen, möglich wird dies jedoch erst nach diesem Projekt sein.

PROJEKTLEITER

Prof. Dr. Jörg Arndt

Fakultät Elektrotechnik Feinwerk-
technik InformationstechnikTechnische Hochschule Nürnberg
Georg Simon Ohm

ANSPRECHPARTNER

Prof. Dr. Jörg Arndt

Tel.: +49.911.5880.1046

Fax: +49.911.5880.5109

joerg.arndt@th-nuernberg.de

www.th-nuernberg.de



TECHNISCHE HOCHSCHULE NÜRNBERG
GEORG SIMON OHM