

Ein analytisches Verfahren zur Profilierung von Verzahnungswerkzeugen

Dipl.-Ing. Isajs Kans-Kagans

Riga, Lettland

Prof. Dr.-Ing. Michael Haas

Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm

Abstract

Bereits Mitte des 20. Jahrhunderts wurde das Problem der Ermittlung des Profils von Werkzeugschneiden zur genauen Erzeugung einer vorgegebenen Verzahnungsgeometrie von verschiedenen Autoren behandelt und auf die dabei entstehenden Probleme wurde hingewiesen. Meist wurde dabei auf die Ermittlung von Hüllkurven bzw. Hüllflächen zurückgegriffen, die ihren Ursprung bereits in der von Euler behandelten Umkehrung der Bewegung haben.

Wie die Autoren im vorliegenden Aufsatz zeigen, kann über diese Vorgehensweise kein allgemein gültiges Verfahren zur Profilierung von Verzahnungswerkzeugen aufgestellt werden, in vielen Fällen führt dieses Verfahren sogar zu unbrauchbaren Ergebnissen.

Im Nachfolgenden wird ein allgemein gültiges Verfahren entwickelt, welches für die Profilierung beliebiger, von einer Schraubenfläche begrenzter Werkzeuge anwendbar ist. Durch die Ermittlung seiner diskreten Punkte kann das Profil des Werkzeugs mit hinreichender Genauigkeit aufgebaut werden.

An Beispielen wird gezeigt, dass das dargelegte Verfahren bei geradverzahnten Zahnrädern zwar auf das Normprofil führt, bei schrägverzahnten Zahnrädern das exakt ermittelte Werkzeugprofil bereits deutliche Abweichungen von der Normgeometrie aufweist.

1. Vorwort

Das in dieser Arbeit behandelnde Thema der Ermittlung der Werkzeuggeometrie zur Erzeugung eines vorgegebenen Werkstückprofils, z.B. eines Verzahnungsprofils, ist im vergangenen Jahrhundert bereits von mehreren Verfassern betrachtet worden. Besonders erwähnenswert in diesem Zusammenhang ist die in der ehemaligen Sowjetunion (sowohl als Monographien als auch in Zeitschriften) erschienene Literatur, z.B. [1], [4] bis [15]. Einer der Autoren des vorliegenden Aufsatzes hatte – selbst aus der ehemaligen Sowjetunion stammend – hauptsächlich Zugang zu den Veröffentlichungen seiner Landsleute. Die Lösung des hier diskutierten Problems wäre ohne die umfangreiche Vorarbeit dieser Autoren nicht möglich gewesen. Erstaunlicherweise enthält keines dieser Werke eine explizite Darstellung eines Verfahrens zur Lösung des Problems, weder analytischer noch graphischer Natur. Bislang wurde dieser Mangel noch nicht bemerkt, weder in den oben genannten, noch in anderen Ländern erschienenen Quellen.

Dieser Umstand spornte den aus Lettland stammenden Autor des vorliegenden Aufsatzes zu dem Versuch an, die Mängel in den Werken seiner Vorgänger zu beseitigen. Dies ist zum Ende der 1960er Jahre auch gelungen. Das von ihm entwickelte Verfahren wurde in einem 1972 auf Russisch veröffentlichten Aufsatz [3] dargelegt. Dem folgte eine erfolgreiche Umsetzung des Verfahrens in der Praxis. Nichtsdestotrotz ist der Aufsatz, kaum dass er erschienen war, in Vergessenheit geraten und hat später weder Resonanz noch Anwendung gefunden. Das regt zu einer erneuten, aktualisierten Veröffentlichung an (diesmal auf Deutsch), zumal sich in den vergangenen vierzig Jahren manches geändert hat, wie z. B. die heute zur Verfügung stehenden, wesentlich verbesserten Möglichkeiten der Computerunterstützung.

Es sei darauf hingewiesen, dass einige der russischen Autoren bereits Ende der 1940er Jahre in den Vorworten zu ihren Büchern ihre Unzufriedenheit mit dem Wissensstand auf diesem Gebiet zum Ausdruck brachten und ihre festen Absichten bekundeten, diesen Umstand durch ihre Beiträge verbessern zu wollen. Hierzu im Folgenden mehrere Zitate:

So schrieb Freifeld im Jahre 1948 [11]: „...das Abwälzfräsen verschiedener verzahnter Werkstücke (auch mit Zähnen, die kein Evolventenprofil besitzen) und die Verwendung von verzahnten Kupplungen bedürfen einer allgemeinen und umfassenden Lösung der mit Verzahnungen verbundene Probleme. (...) Vom Verfasser wurde in diesem Zusammenhang die Methode der Hüllkurven und Hüllflächen vervollkommenet und angewandt als das allgemeinste Verfahren zur Lösung nicht nur von Verzahnungsproblemen, sondern auch für weitere, mit der Berechnung von Werkzeugen verbundene Probleme (wie beispielsweise dem Problem der Hinterarbeitung der Wälzfräser u.ä.)“¹

Diese Behauptungen Freifelds hinderten Cwis nicht daran, im Jahre 1961 folgendes zu schreiben [14]: „Das Problem der Ermittlung des Profils der Schneide eines Werkzeugs ist mit der ausführlich ausgearbeiteten Theorie der Verzahnungen und der Erzeugung von miteinander konjugierten Oberflächen untrennbar verbunden. Doch ohne zusätzliche theoretische Ergänzung erscheint es unmöglich, diese Theorie in Bezug auf das Profilieren von spanenden Werkzeugen anzuwenden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass in der Theorie der Erzeugung zueinander konjugierter Oberflächen nur Probleme der Erzeugung von Oberflächen durch andere betrachtet werden, während bei der spanenden Fertigung der konjugierten Oberflächen mittels beispielsweise AbwälzfräSENS diese nicht von Oberflächen, sondern von Linien, nämlich den Schneiden eines Werkzeugs, erzeugt werden. (...) Die bekannten Methoden der Ermittlung des Profils der Schneiden eines Wälzwerkzeugs sind dadurch gekennzeichnet, dass es für jede Art solcher Werkzeuge eine spezielle Methode zur Ermittlung des Profils gibt, wobei diese Methoden voneinander unabhängig sind. (...) Dabei stellen die mit diesen Werkzeugen verwirklichten Fertigungsverfahren (beispielsweise AbwälzfräSEN, Zahnstoßen u. ä.) nichts anderes dar, als Sonderfälle des allgemeinen Abwälzverfahrens. In diesem Fall kann man aber ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung des Profils der Wälzwerkzeuge entwickeln, sowie die entsprechenden allgemeinen, auch für jeden Sonderfall geltenden Gleichungen gewinnen.“²

Ljukschin wiederum schrieb 1968 [8]: „Die einfache und anschaulich dargelegte, strikte und vollständige Theorie der Schraubenflächen soll die Grundlage für die Theorie der Werkzeuge im Allgemeinen bilden, insbesondere für das Entwerfen von spanenden Werkzeugen und die Entwicklung neuer Werkzeugarten und neuer Bearbeitungsverfahren. (...) Das Fehlen einer solchen speziellen Theorie zwingt die in der Theorie der Werkzeuge tätigen Autoren entweder jedes Mal, gewisse Eigenschaften der Schraubenflächen je nach den konkret vorlie-

¹ Vgl. [11]. (Von den Autoren sinngemäß aus dem Russischen übersetzt.)

² Vgl. [14]. (Von den Autoren sinngemäß aus dem Russischen übersetzt.)

genden Verhältnissen zu definieren, oder auf deren Gebrauch wegen den auftretenden mathematischen Schwierigkeiten zu verzichten.³

Hier scheinen einige Fragen angebracht zu sein, z.B. wie sich eine für die praktische Arbeit anschauliche Darlegung der Theorie mit der notwendigen mathematischen Strenge verträgt, oder welche "gewissen Eigenschaften" der Schraubenflächen überhaupt notwendig sind.

Was die Aussagen von Cwis [14] bezüglich der Gegenüberstellung der Profilierung einer Linie (einer Schneide) und der Profilierung einer Oberfläche betrifft, so schlägt er in [14] ein Verfahren zur Profilierung einer Oberfläche vor. Die Schneiden sollen von dieser Oberfläche geschnitten mit den Spannuten gebildet werden. Dies ergibt aber für die erwähnte Gegenüberstellung keinen Sinn, da das Profil der Spannuten frei wählbar ist. Davon abgesehen, dass das in [14] vorgeschlagene Verfahren nicht klar dargelegt und daher zweifelhaft ist, muss angemerkt werden, dass erstens, das Profil der Schneide, nämlich einer räumlichen Kurve, ein kaum definierbarer Begriff ist und dass die Bemessung einer Schneide sich als schwierig und somit unzuverlässig erweist. Zweitens sind für die Profilierung von Werkzeugen zweiter Ordnung die Oberflächen von Bedeutung, deren Schnittmenge die Schneide bilden soll. Sollen die Spannuten in Betracht gezogen werden, so muss deren Profil im Voraus gegeben sein, da die Punkte der Schneide nur auf deren Oberfläche liegen können und diese Einschränkung das Profil des zu profilierenden Werkzeugs beeinflussen kann. Drittens gibt es in der Tat für das Profilieren von Wälzwerkzeugen weder allgemeine noch spezielle Methoden. Cwis konnte sein Vorhaben nicht verwirklichen.

Im vorliegenden Werk wollen die Verfasser zeigen, dass zwischen den betrachteten Werkzeugen keine qualitativen, sondern nur quantitative Unterschiede bestehen, und ein allgemeines Verfahren zum Profilieren vorstellen.

Im Übrigen findet man zahlenmäßige Beispiele nur bei Cwis [14]. Doch weder die Ausgangswerte (der Normalschnitt der zu bearbeitenden Oberfläche), noch die dargestellten Lösungen sind befriedigend. Letztere sind mit keiner strikten Begründung versehen.

Ähnliches gilt für die Veröffentlichung von Freifeld [11]. Der Lösung des Problems am Nächsten gekommen zu sein scheint Ljukschin [8], doch auch von ihm wurde das Ziel nicht erreicht. In der weiteren Literatur finden sich praktisch keine theoretischen Untersuchungen zu diesem Thema.

Eine weitere, als merkwürdig zu bezeichnende Tatsache ist, dass sowohl Freifeld als auch Cwis in keinem der von ihnen angeführten Beispiele Hüllkurven verwendet haben, sondern immer einen Umweg zur Vermeidung dieser fanden.

2. Grundlagen

Der Grundgedanke aller bisher vorgeschlagenen Verfahren besteht in der Ermittlung der Hüllkurve einer Kurven- bzw. der Hüllfläche einer Oberflächenschar. Letztere soll von allen Positionen aus gebildet werden, die das zu bearbeitende Profil bzw. die zu bearbeitende Oberfläche gegenüber dem als unbeweglich betrachteten Werkzeug während der Bearbeitung auf einer Werkzeugmaschine annehmen kann. Diese Hüllkurve bzw. Hüllfläche soll das zu ermittelnde Profil des Werkzeugs bestimmen. Der Gedanke, der sich dahinter verbirgt, geht ursprünglich auf Euler zurück. Die Grundidee ist die Umkehrung einer Bewegung. Bei solch einer Inversion sollen sich die Rollen der Eingehüllten und der Einhüllenden vertauschen. Dass dem allerdings nicht immer so ist, wird schon im nächsten einfachen, [9] entnommenen Beispiel deutlich.

Betrachtet man die Linienschar

$$y - (x - \alpha)^3 = 0, \tag{1}$$

die bei der Verschiebung der kubischen Parabel $y = x^3$ längs der Ox -Achse entsteht, so ist die Ergänzungsgleichung zur Ermittlung der Hüllkurve dieser Schar

$$\frac{\partial [y - (x - \alpha)^3]}{\partial \alpha} = 3(x - \alpha)^2 = 0,$$

³ Vgl. [8]. (Von den Autoren sinngemäß aus dem Russischen übersetzt.)

woraus folgt $\alpha = x$, $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 3(x - \alpha)^2 = 0$.

Somit berührt die Ox -Achse in jedem ihrer Punkte eine der Kurven der Schar (1) und ist somit die Hüllkurve dieser Schar. Invertiert man aber die Bewegung, deren Ergebnis die Linienschar ist, so erzeugt in der invertierten Bewegung die Ox -Achse nichts anderes als sich selbst. Weiterhin sei angemerkt, dass die ermittelte Hüllkurve alle Linien der Linienschar schneidet und somit als Werkzeug nicht brauchbar ist, siehe Abbildung 1.

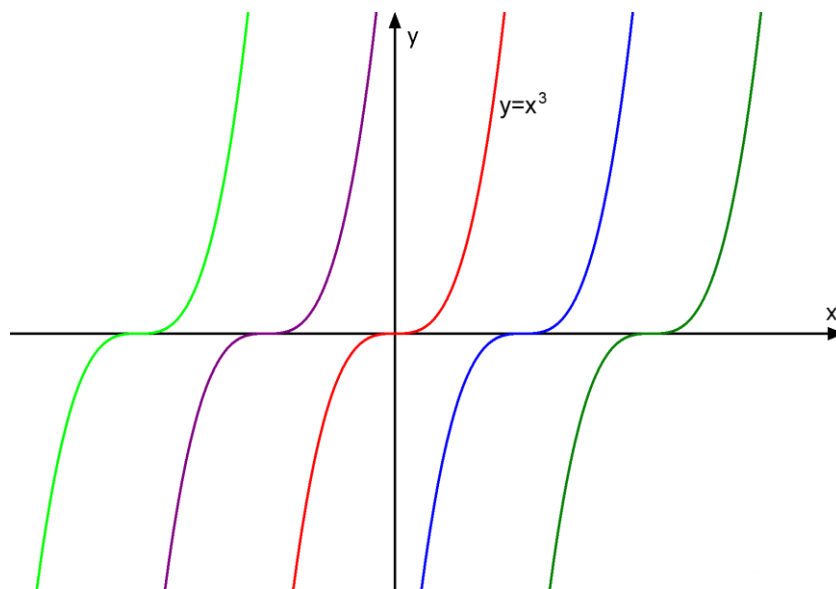


Abbildung 1

Ebenso wird in Betracht gezogen, dass es sich bei der Definition einer Hüllkurve bzw. Hüllfläche nur um glatte Linien bzw. Oberflächen handelt, die keine Bruchstellen enthalten. Dass diese Bemerkung wesentlich ist, sieht man schon aus folgendem einfachem Beispiel: Betrachten wir ein dem genormten Bezugsprofil entsprechendes Zahnrad mit 53 Zähnen, dessen Modul m ist. Für den Radius des Grundkreises dieses Zahnrad berechnet man $r = 26,5 \cdot m \cdot \cos 20^\circ \approx 24,90185445m$, den Radius des Fußkreises erhält man zu $r_0 = (26,5 - 1,25)m = 25,25m > r$. Somit könnte die Zahnflanke vollständig aus einem Bogen der Kreisevolvente ohne Fußrundung bestehen. Wird der Teilkreis dieses Zahnrad, dessen Profil eine Kreisevolvente darstellt, auf einer Geraden abgerollt, so ist das Hüllgebilde der vom Profil des Rades erzeugten Linienschar eine gebrochene Kurve, und zwar das Profil einer Zahnstange. Handelt es sich um das genormte Bezugsprofil mit Eingriffswinkel 20° , so beträgt der Innenwinkel beim Eckpunkt des Zahnes 110° . Den dem auf dem Fußkreis liegenden Punkt der Evolvente entsprechenden Wälzwinkel φ ermittelt man aus der Gleichung $26,5 \cdot \cos 20^\circ \sqrt{1 + \varphi^2} = 25,25$, woraus $\varphi \approx 0,16780011$ im Bogenmaß folgt. Der Winkel, den die Tangente an die Evolvente zu diesem Punkt mit dem zugehörigen Radius bildet, ist $\phi = \arctan \varphi \approx 9^\circ 31' 32'' < 20^\circ$. Wird jetzt die Zahnstange auf dem Teilkreis des Rads abgerollt, so kann der Schnittpunkt von Evolvente und Fußkreis offenbar nur vom Eckpunkt des Zahnes erreicht werden. Dazu aber ist der Winkel, den die Evolvente mit dem Fußkreis bildet, zu „eng“. Es entsteht am Zahn des Rads eine unvermeidbare Fußrundung, während das Ausgangsprofil (das Zahnrad) keine solche besitzt.

Auch ein räumliches Gegenbeispiel kann angeführt werden. Ein Drehzylinder, wie er z.B. in Reibgetrieben auftritt, kann als Grenzfall eines Zahnrad mit infinitesimal kleinen Zähnen interpretiert werden, während die Anzahl der Zähne gleichzeitig gegen Unendlich geht. Zur Herstellung solch eines „entarteten Zahnrad“ muss offensichtlich der Wälzfräser durch einen Drehzylinder ersetzt werden. Dabei dürfen die Achsen des Werkstücks und des Werkzeugs senkrecht zueinander stehen. Will man jetzt die Bewegungen von Werkstück und Werkzeug umkehren, so entfällt die Rotation des Werkstücks um seine Achse, da sich eine Rotationsfläche geometrisch durch Drehung um die Rotationsachse auf sich selbst abbildet. Ebenso verändert sich ein Zylinder bei einer Verschiebung parallel zu seiner Mantellinie nicht. Daher entfällt auch der Vorschub des Werkzeugs. Es verbleibt lediglich die Rotation der zu ermittelnden Oberfläche des Werkzeugs. Um diese zu invertieren, ver-

setzt man den zu bearbeitenden Zylinder in eine Bewegung, bei der die Achse desselben in einer zur Rotationsachse des Werkzeugs senkrechten Ebene bleibt, während der Abstand zwischen den beiden Achsen konstant ist.

Die implizite Gleichung der Oberflächenschar, die die Mantelfläche des zu bearbeitenden Zylinders bei der oben beschriebenen Bewegung bildet, ist

$$(x \cos \varphi + y \sin \varphi - d)^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad (2)$$

wobei r der Radius des zu bearbeitenden Zylinders, d der Achsabstand zwischen Werkstück und Werkzeug und φ ein veränderlicher Parameter ist.

Um die Hüllfläche der Oberflächenschar (2) zu ermitteln, setzen wir die partielle Ableitung des linken Teils von Gleichung (2) nach φ gleich Null. Daraus folgt

$$(-x \sin \varphi + y \cos \varphi)(x \cos \varphi + y \sin \varphi - d) = 0. \quad (3)$$

Für $x \cos \varphi + y \sin \varphi - d = 0$ folgt unmittelbar aus (2) $z = \pm r$. Die Hüllfläche der Oberflächenschar (2) stellt somit zwei zur xOy -Ebene parallele Ebenen dar. Diese Ebenen werden aber nur in außerhalb des Kreises $x^2 + y^2 \leq d^2$ liegenden Punkten von den Zylindern (2) berührt und können somit keine Hüllfläche darstellen.

Die andere Möglichkeit ist, dass $-x \sin \varphi + y \cos \varphi = 0$ gilt, woraus $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ folgt. Setzt man den rechte Teil der letzten Gleichung für φ in (2) ein, so erhält man über den Satz des Pythagoras mit der Gleichung

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - d\right)^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (4)$$

die Oberfläche eines Torus, dessen Achse mit der Achse des zu ermittelnden Werkzeugs übereinstimmt. Wie leicht zu überprüfen ist, stellt der Torus (4) tatsächlich die Hüllfläche der Oberflächenschar (2) dar, vgl. Abbildung 2.

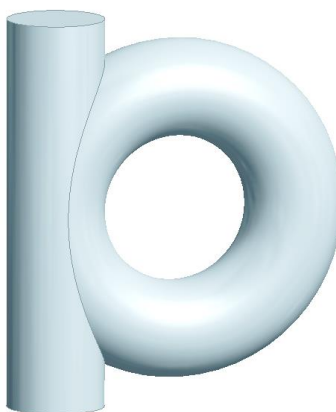


Abbildung 2

Man erkennt außerdem, dass die mit der Bearbeitung des Zylinders auf einer Fräsmaschine verbundenen Bewegungen die gegenseitige Anordnung des Zylinders und des Torus nicht ändern. Dennoch ist der Torus als Werkzeug unbrauchbar, da er die Mantelfläche des Zylinders schneidet. Folgende Bemerkung sei noch erlaubt: Versetzt man den Torus in die dem Vorschub des Werkzeugs entsprechende Bewegung, so ist die Mantelfläche des Zylinders tatsächlich die Hüllfläche der entstehenden Oberflächenschar. Doch wie die vorangehenden Beispiele zeigen, ist dies eher ein Zufall und keine Gesetzmäßigkeit.

Andererseits sagt die Analogie mit einem Wälzfräser voraus, dass das zu ermittelnde Werkzeug einen Drehzylinder darstellt, in welchen sich (im Grenzfall) der Wälzfräser verwandelt. Es entsteht eine Art Schleifscheibe, was mit der Erfahrung übereinstimmt und daher keinen Widerspruch darstellt.

Allerdings kann die gewünschte zylindrische Oberfläche des Werkstücks nicht bearbeitet werden, ohne dass das Werkzeug in eine Vorschubbewegung versetzt wird. Als Folge davon erhält man statt eines Drehzylinders die in Abbildung 3 schematisch dargestellte Oberfläche.

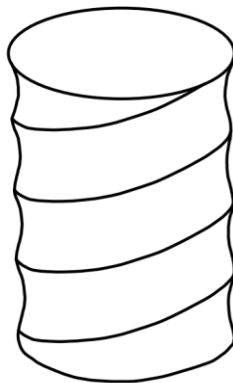


Abbildung 3

Die Abweichungen dieser Oberfläche von einem Drehzylinder lassen sich zwar beliebig verkleinern, indem man den Vorschub des Werkzeugs hinreichend klein wählt, völlig verhindern lassen sich diese jedoch in der Praxis nicht.

Invertiert man jetzt die Bewegungen, so ist das Aussehen der von solch einer Oberfläche gebildeten Flächenschar unklar, ebenso wie unklar ist, ob es zu dieser Flächenschar eine Hüllfläche gibt. Daher sollte auf die Inversion der Bewegung sowie die Ermittlung von Hüllgebilden verzichtet werden, und es sollten andere Wege zur Lösung des Problems der Profilierung von Wälzwerkzeugen gefunden werden.

Erstaunlicherweise sind alle soeben festgestellten Tatsachen der Forschung - angefangen bei Euler - Jahrhunderte lang entgangen. Warum dies so ist, ist schwierig zu klären und auch nicht Ziel des vorliegenden Aufsatzes. Zwei mögliche Gründe dafür sollen dennoch erwähnt werden.

Einerseits führt im ebenen Fall, wenn sowohl die zu bearbeitende Oberfläche, als auch die zu ermittelnde Oberfläche des Werkzeugs zylindrisch sind, und deren Mantellinien stets zur selben Ebene senkrecht bleiben, die Umkehr der Bewegungen in den meisten, für die Praxis relevanten Fällen zum gewünschten Ziel, sofern das Problem überhaupt lösbar ist.

Andererseits können auch solche Werkzeuge, wie z. B. Wälzfräser, Schabräder usw., als Wälzwerkzeuge betrachtet werden, die z. B. die Herstellung von Schraubenzahnrädern und Nutenwellen mit hinreichender Genauigkeit ermöglichen. Dadurch scheint die Möglichkeit zu bestehen, deren Oberflächen als Hüllflächen von in der umgekehrten Bewegung erzeugten Oberflächenscharen zu ermitteln. Die folgenden Erwägungen scheinen diese Annahme zu unterstützen.

Erstens ist die im ebenen Falle einfach ausführbare, grafische Ermittlung des (scheinbaren) Profils des Werkzeugs im räumlichen Falle kaum möglich. Zweitens führt die Anwendung der Analysis zur Ermittlung der Hüllflächen in nahezu allen praktisch relevanten Fällen zu unübersichtlichen Gleichungen, aus denen sich keine anschauliche Vorstellung über die Oberfläche ableiten lässt. Man kann nur vermuten, dass sich hinter solchen Gleichungen die Beschreibungen bekannter Oberflächen der Werkzeuge verbergen. Dem ist jedoch nicht so. Ein allgemein gültiges Verfahren zur tatsächlichen Lösung des Problems soll im Folgenden dargelegt werden.

Die Analogie mit einem Drehmeißel gibt vernünftige Forderungen vor, die an das zu profilierende Werkzeug zu stellen sind. Der Drehmeißel erzeugt bei einer von Null verschiedenen Vorschubgeschwindigkeit auf dem Werkstück eine Oberfläche, welche die Mantelfläche eines Drehzylinders umso genauer annähert, je kleiner der Vorschub wird. Völlig verschwinden darf der Vorschub allerdings nicht.

Dementsprechend soll das Wälzwerkzeug, wenn es längs der Achse des Werkstücks nicht verschoben wird, einen definierten Stirnschnitt auf dem Werkstück bilden. Im Allgemeinen betrifft diese Forderung sowohl den Stirn-, als auch den Axialschnitt. Die Ebene des betrachteten Querschnitts soll in beiden Fällen durch die gemeinsame Normale der Achsen des Werkstücks und des Werkzeugs verlaufen und wird im Folgenden als Basisebene bezeichnet. Während der Bearbeitung sollen das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten des Werk-

zeugs und des Werkstücks, der Winkel, unter dem sich ihre Achsen kreuzen, und deren Achsabstand konstant bleiben. Außerdem soll die Oberfläche des Werkzeugs einfach herzustellen sein. Daher wählen wir Schraubenflächen aus. Als Formgebende sollen keine Linien (d.h. Schneiden), sondern Oberflächen ermittelt werden. Weiterhin sollen sowohl der Winkel, unter dem sich die Achsen des Werkstücks und des Werkzeugs kreuzen, als auch deren Achsabstand frei wählbar sein. Damit sind alle das Problem betreffenden Forderungen und Bedingungen formuliert.

Das zu lösende Problem wird nun folgendermaßen definiert: Seien im Raum zwei kartesische Koordinatensysteme, z.B. $Oxyz$ und O_1XYZ gegeben, deren Oz - und O_1Z -Achsen einen konstanten Winkel $\frac{\pi}{2} - \mathcal{G}$ bilden.

Die Koordinatensysteme rotieren mit den Winkelgeschwindigkeiten \vec{v} um die Oz - bzw. \vec{v}_1 um die O_1Z -Achse. Das Verhältnis der Beträge der Winkelgeschwindigkeiten $\frac{v}{v_1} = k$ soll dabei konstant bleiben, ebenso

wie der Abstand $L = OO_1$ zwischen den Rotationsachsen. Ist jetzt in der Basisebene xOy eine beliebige Linie (ein Profil) gegeben, so verläuft bei jeder möglichen gegenseitigen Anordnung der beiden Koordinatensysteme durch jeden Punkt derselben eine Schraubenlinie l mit Achse O_1Z , deren Steigung eine vorgegebene Konstante T ist. Die Schraubenlinie kann mit Rechts- oder Linkssteigung ausgeführt werden. Die beiden letzten Bedingungen sind von Wahl der betreffenden Anordnung unabhängig.

Wird jetzt der Raum, also beide Koordinatensysteme, mit der Winkelgeschwindigkeit $-\vec{v}$ in Rotation versetzt, so bleibt das System $Oxyz$ unbeweglich, während sich für das System O_1XYZ die Winkelgeschwindigkeit $\vec{v}_1 - \vec{v}$ ergibt. Der Schnittpunkt der Schraubenlinie l mit der Ebene xOy beschreibt dabei eine bestimmte Laufbahn. Berührt diese Laufbahn im betreffenden Punkt das gegebene Profil, so kann diese gegenseitige Anordnung dem betreffenden Punkt des Profils eindeutig zugewiesen werden.

Somit kann das zu lösende Problem auf den ebenen Fall zurückgeführt werden, was aber keineswegs bedeutet, dass es mittels Umkehr der Bewegung gelöst werden kann. Dies wäre nur dann der Fall, wenn sich ein in der xOy -Ebene liegender Querschnitt der Oberfläche des Werkzeugs gegenüber dem zu bearbeitenden Profil bewegte. Dies findet aber nur in zwei Grenzfällen statt, und zwar, wenn die Rotationsachse des Werkzeugs entweder in der xOy -Ebene liegt oder zu dieser senkrecht ist. Im allgemeinen Fall verformt sich bei der Rotation des Werkzeugs dessen in der xOy -Ebene gelegener Querschnitt. So findet im eigentlichen Sinne keine Bewegung statt, die umgekehrt werden könnte.

Die oben erwähnte Laufbahn eines Schnittpunkts kann allerdings relativ einfach ermittelt werden, worauf das im vorliegenden Aufsatz geschilderte Verfahren basiert. Für die Erarbeitung eines solchen Verfahrens sprechen folgende Punkte:

Erstens wird, wie aus dem oben dargelegten folgt, ein allgemeines Verfahren entwickelt, das für die Profilierung beliebiger, von einer Schraubenfläche begrenzter Wälzwerkzeuge (beispielsweise Wälzfräser, Schabräder usw.) anwendbar ist, da zwischen solchen Werkzeugen keine qualitativen, sondern nur quantitative Unterschiede bestehen. Die gegenwärtigen Verfahren ermöglichen das nicht. Auf diesen Umstand wurde bereits von Cwis [14] hingewiesen. Das im nachstehenden geschilderte Verfahren ermöglicht es, für jeden Punkt des zu bearbeitenden Profils unmittelbar festzustellen, ob dieser Punkt beim ausgewählten Bearbeitungsschema für das Werkzeug erreichbar ist in dem Sinne, dass andere Punkte des Profils dabei nicht abgetrennt werden.

Zweitens ist zu erwarten, dass das entwickelte Verfahren ein tieferes Verständnis für das geometrische Bild des Prozesses der Zerspanung bei Wälzfräsen, Schaben usw. ermöglichen wird.

Drittens ist, wie bereits erwähnt, ein schräger Querschnitt einer Schraubenfläche keine Zahnstange, sondern dieser wird während der Rotation der Schraubenfläche entstellt. Deshalb ist z.B. ein Wälzfräser streng genommen kein universelles Werkzeug, sondern für jedes konkrete Zahnrad müsste dieser individuell profiliert werden. In der Praxis ersetzt man das individuelle Profil durch ein gemitteltes. Mit dem dargelegten Verfahren wird eine Abschätzung der Abweichungen des genormten Profils vom theoretisch notwendigen ermöglicht.

Auch im ebenen Falle erweist sich das geschilderte Verfahren als nützlich, da es die Möglichkeit ausschließt, versehentlich ein untaugliches Profil für das Werkzeug auszuwählen.

Anzumerken sei noch, dass das Verfahren erst aufgrund des heute üblichen Computereinsatzes in der Praxis anwendbar wird.

3. Darlegung des Verfahrens

Abbildung 4 soll den Grundgedanken der folgenden Darlegung veranschaulichen.

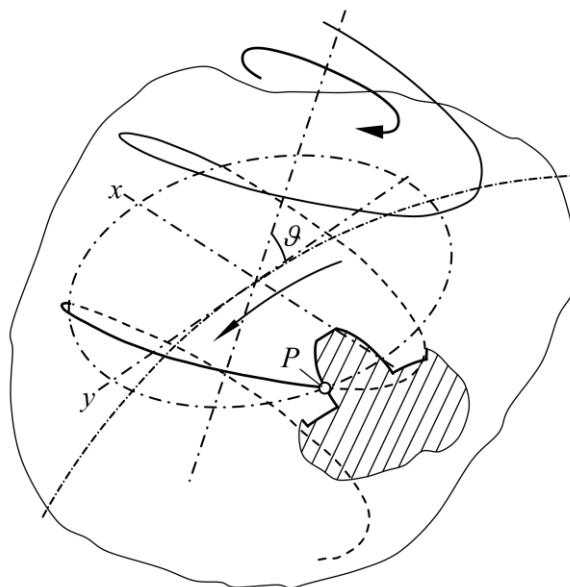


Abbildung 4

Zu sehen ist ein Fragment eines beliebigen zu erzeugenden Profils (schraffiert dargestellt), das in der Basis-Ebene xOy liegt, sowie eine der oben erwähnten Schraubenlinien, welche die Basis-Ebene sozusagen einem Korkenzieher ähnlich „durchbohrt“ und momentan durch einen Punkt P des Profils verläuft. Die strichpunktieren Linien zeigen die Ellipse, die als Schnittgebilde der Basis-Ebene und des Zylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, entsteht, sowie ein Fragment des vom Schnittpunkt der Basis-Ebene und der Achse des Werkzeugs (der Schraubenlinie) in relativer Bewegung umschriebenen Kreises. Die anderen strichpunktieren Linien sind die Achsen der Schraubenlinie bzw. der Ellipse. Die Pfeile bezeichnen die Richtungen der zu betrachtenden Bewegungen.

Es ist leicht ersichtlich, dass der Radius des der Schraubenlinie entsprechenden Zylinders die einzige noch frei wählbare Größe im dargestellten Schema ist. Dieser Radius soll so gewählt werden, dass die Laufbahn (in der Abbildung nicht dargestellt) des Schnittpunkts der Schraubenlinie mit der Basis-Ebene das zu erzeugende Profil im betreffenden Punkt berührt.

Die Bewegung der Schraubenlinie kann aus zwei Bewegungen zusammengesetzt werden, und zwar aus ihrer Rotation um die O_1Z -Achse und der Rotation dieser Achse um die O_Z -Achse (angemerkt sei, dass hierbei keine Schraubung entsteht). Dementsprechend setzt sich die Bewegung des betreffenden Schnittpunkts aus dessen Bewegung längs der in Abbildung 4 dargestellten Ellipse und der Rotation derselben um die O_Z -Achse zusammen.

Definieren wir nun die im Folgenden notwendigen Koordinatensysteme: Die O_Z -Achse soll mit der Rotationsachse des Werkstücks zusammenfallen. Dabei soll das Werkstück von der Spitze des Vektors $\overrightarrow{O_Z}$ aus betrachtet im Uhrzeigersinn rotieren. Das in der Basis-Ebene gelegene xOy -System soll zusammen mit der O_Z -Achse ein Rechtssystem $Oxyz$ bilden. Das verschiebliche Koordinatensystem soll für *alle* mit dem zu profilierenden Werkzeug koaxialen Zylinder gelten. Wir gehen bei dessen Definition von der Tatsache aus, dass die Schraubenlinien, die auf allen diesen Zylindern der zu profilierenden Schraubenfläche entsprechen können, die gleiche Steigung haben, die mit T bezeichnet wird.

Um die Orientierung des verschieblichen (mit dem Werkzeug verbundenen) Koordinatensystems festzulegen, betrachten wir einen mit dem Werkzeug koaxialen, von einer Ebene schräg durchschnittenen Zylinder, auf dessen Mantelfläche eine Schraubenlinie mit Rechtssteigung liegt, vgl. Abbildung 5. Die dargestellte Schrau-

benlinie ist die gleiche wie in Abbildung 4. Der Bogenpfeil entspricht dabei der Richtung der Rotation des zu profilierenden Werkzeugs.

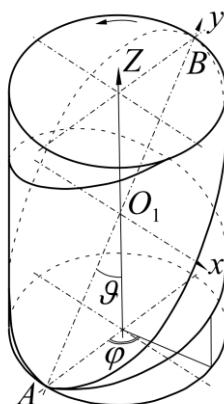


Abbildung 5

Sei r der Radius des Zylinders und ω der Steigungswinkel der Schraubenlinie. Offenbar gilt $T = 2\pi r \tan \omega$ bzw. $r \tan \omega = \frac{T}{2\pi}$. Die O_1Z -Achse soll mit der Achse des Zylinders übereinstimmen und das Werkzeug im mathematisch positiven Sinne um den Vektor $\overrightarrow{O_1Z}$ drehen.

Aus dem Zylinder schneiden wir gedanklich den zwischen zwei zu seiner Achse senkrechten Ebenen, die durch die Hauptscheitel A und B der im betrachteten Querschnitt entstandenen Ellipse verlaufenden, eingeschlossenen Teil heraus. Anschließend zerschneiden wir die Mantelfläche des herausgeschnittenen Teils des Zylinders entlang der durch den unten liegenden Hauptscheitel verlaufenden Mantellinie. Auf der Mantelfläche des ausgeschnittenen Teils führen wir die Koordinaten φ und Z entsprechend Abbildung 5 ein. Diese Koordinaten gelten für *jeden* mit dem Werkzeug coaxialen Zylinder. Der Winkel φ soll von der Spitze des Vektors $\overrightarrow{O_1Z}$ aus betrachtet in Richtung der Rotation des Werkzeugs positiv zählen. Liegt auf der Mantelfläche des Zylinders eine Schraubenlinie mit Linkssteigung, so wird der Winkel φ in entgegengesetzter Richtung gemessen. Die Koordinate Z zählt vom Schnittpunkt der Schnittebene mit der Achse des Zylinders in Richtung des Vektors $\overrightarrow{O_1Z}$.

Der Zusammenhang der Bewegung des Schnittpunkts einer Schraubenlinie mit der Basisebene kann Abbildung 6 entnommen werden, welche die Abwicklung der zerschnittenen Mantelfläche des Zylinders darstellt.

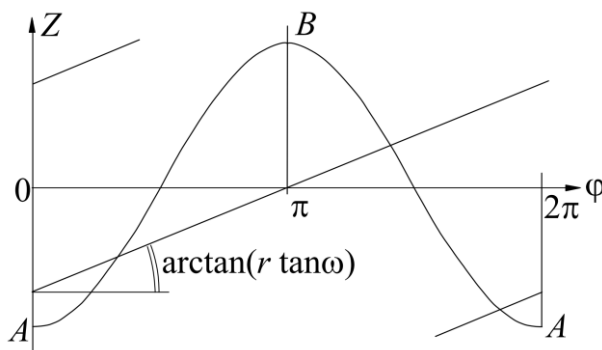


Abbildung 6

Die Ellipse wird dabei auf eine Linie mit der Gleichung

$$Z_1(\varphi) = -r \cot \vartheta \cos \varphi, \quad (5)$$

die Schraubenlinie auf eine Schar paralleler Geraden mit Steigung $r \tan \omega$ abgebildet.

Leitet man Gleichung (5) nach φ ab, erhält man $\frac{dZ_1}{d\varphi} = r \cot \vartheta \sin \varphi$ und dementsprechend $\frac{dZ_1}{d\varphi} > 0$ bzw.

$$\text{sign}\left(\frac{dZ_1}{d\varphi}\right) = \text{sign}(r \tan \omega) \quad \text{für } 0 < \varphi < \pi \quad \text{und} \quad \frac{dZ_1}{d\varphi} < 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{sign}\left(\frac{dZ_1}{d\varphi}\right) \neq \text{sign}(r \tan \omega) \quad \text{für}$$

$\pi < \varphi < 2\pi$, unabhängig vom Umdrehungswinkel des Werkzeugs und von der Steigungsrichtung der Schraubenlinie.

Als *negativ* bezeichnen wir jene Hälfte der Ellipse, für deren Punkte gilt $0 < \varphi < \pi$. Die andere Hälfte der Ellipse wird dementsprechend als *positiv* bezeichnet.

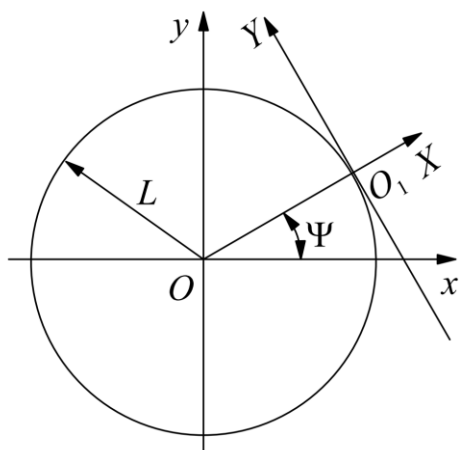
Schneidet eine beliebige Ebene eine Schraubenfläche schräg, so entspricht jedem mit der Schraubenfläche coaxialen Zylinder als Querschnitt eine Ellipse, deren Mittelpunkt auf der Achse der Schraubenfläche liegt. Die Hauptachsen aller solchen Ellipsen fallen zusammen.

Andererseits entspricht jedem solchen Zylinder im Allgemeinen eine Schar Schraubenlinien, die beim Schnitt des Zylinders mit der Schraubenfläche entsteht. Unabhängig von der Wahl des Zylinders besitzen alle Schraubenlinien der entsprechenden Schar entweder Rechts- oder Linkssteigung.

Dies bedeutet, dass die negativen Hälften aller oben erwähnten Ellipsen auf einer Seite ihrer gemeinsamen Hauptachse, die positiven aber auf der anderen Seite liegen müssen. Dies erlaubt es, zwischen positiven und negativen Hälften auch für schräge Querschnitte von Schraubenflächen zu unterscheiden, wobei diese Hälften während der Rotation des Werkzeugs unbeweglich bleiben.

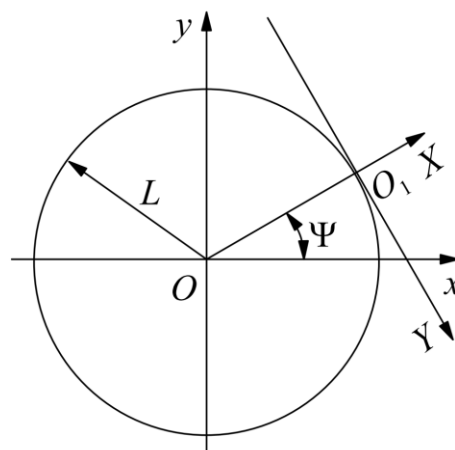
Definieren wir jetzt das verschiebliche Koordinatensystem. Sei die Ebene des schrägen Querschnitts die Basisebene. Die O_1X -Achse soll mit der gemeinsamen Nebenachse der oben erwähnten Ellipsen zusammenfallen und im Fall eines linkssteigenden Werkzeugs in Richtung der positiven, bei einem rechtssteigenden Werkzeug in Richtung der negativen Hälfte des Querschnitts zeigen. Die O_1Z -Achse soll mit der Achse des Werkzeugs zusammenfallen, ihre Richtung wird durch den Vektor $\overrightarrow{O_1Z}$ bestimmt. Die O_1Y -Achse fällt mit der gemeinsamen Hauptachse der oben erwähnten Ellipsen zusammen und bildet mit den beiden anderen Achsen ein Rechtssystem. Es entsteht somit eigentlich ein schrägwinkliges Koordinatensystem, hauptsächlich wird jedoch das kartesische Koordinatensystem XO_1Y verwendet werden. O sei der Ursprung des festen, O_1 der Ursprung des verschieblichen Koordinatensystems. Die Länge der Strecke OO_1 sei L .

Anschaulich ist klar, dass das bewegliche Koordinatensystem mit dem Werkzeug nicht fest verbunden ist, da sich der in der Basisebene gelegene Querschnitt bei der Rotation des Werkzeugs verformt und deshalb mit keinem Koordinatensystem fest verbunden sein kann. Aus oben gesagtem folgt, dass die O_1X -Achse immer durch den Punkt O verläuft. Der Winkel, den die Ox -Achse und die O_1X -Achse bilden, wird von der Ox -Achse aus im mathematisch positiven Sinn gemessen und mit Ψ bezeichnet. Bei einem bestimmten Wert des Winkels Ψ ergeben sich vier Möglichkeiten der gegenseitigen Orientierung der in der Basisebene gelegenen Koordinatensysteme. Die Abbildungen 7.1 bis 7.4 zeigen die möglichen Varianten mit den zugehörigen Transformationsformeln (6.1) bis (6.4).



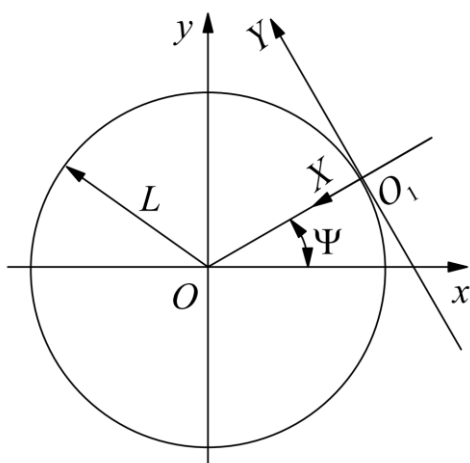
$$\begin{cases} x = (L + X) \cos \Psi - Y \sin \Psi \\ y = (L + X) \sin \Psi + Y \cos \Psi \end{cases} \quad (6.1)$$

Abbildung 7.1



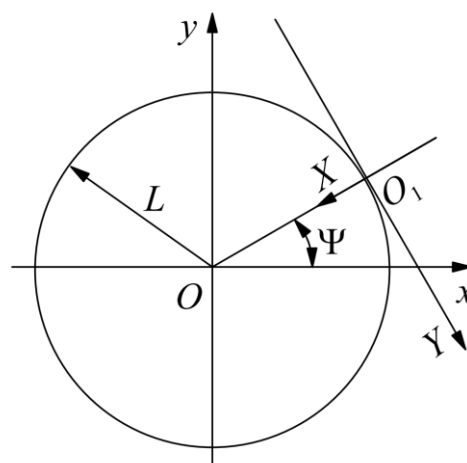
$$\begin{cases} x = (L + X) \cos \Psi + Y \sin \Psi \\ y = (L + X) \sin \Psi - Y \cos \Psi \end{cases} \quad (6.2)$$

Abbildung 7.2



$$\begin{cases} x = (L - X) \cos \Psi - Y \sin \Psi \\ y = (L - X) \sin \Psi + Y \cos \Psi \end{cases} \quad (6.3)$$

Abbildung 7.3



$$\begin{cases} x = (L - X) \cos \Psi + Y \sin \Psi \\ y = (L - X) \sin \Psi - Y \cos \Psi \end{cases} \quad (6.4)$$

Abbildung 7.4

Kommen wir jetzt auf Abbildung 5 zurück. Bezeichnen wir die Hauptachse der im Querschnitt des Zylinders entstandenen Ellipse mit a , so ist deren Nebenachse $b = r = a \sin \vartheta$. Dementsprechend ist die Gleichung der Ellipse im Koordinatensystem O_1XY

$$\frac{X^2}{a^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{Y^2}{a^2} = 1, \quad (7)$$

woraus folgt

$$X = \pm \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \vartheta. \quad (8)$$

Für unsere Zwecke benötigen wir nur jene Punkte der Ellipse, die auf der Seite der O_1Y -Achse liegen, auf der auch der Punkt O liegt. Für die in den Abbildungen 7.1 und 7.2 dargestellten Fälle soll der negative, für die Fälle aus 7.3 und 7.4 der positive Wert der Abszisse verwendet werden.

Setzen wir $X = -\sqrt{a^2 - Y^2} \sin \varrho$ in die Gleichungen (6.1) und (6.2) ein, so erhalten wir folgende Ausdrücke für die zum betreffenden Wert des Winkels Ψ gehörenden Koordinaten x, y des Punktes der Ellipse, dem der laufende Wert Y der Ordinate entspricht:

$$\begin{cases} x = \left(L - \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \varrho \right) \cos \Psi - Y \sin \Psi \\ y = \left(L - \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \varrho \right) \sin \Psi + Y \cos \Psi \end{cases} \quad (9.1)$$

Analog erhält man aus (6.3) und (6.4)

$$\begin{cases} x = \left(L - \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \varrho \right) \cos \Psi + Y \sin \Psi \\ y = \left(L - \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \varrho \right) \sin \Psi - Y \cos \Psi \end{cases} \quad (9.2)$$

Die Ausdrücke (9.1) und (9.2) sind nichts anderes, als der Rotation der Ellipse entsprechende Transformationsformeln, die infolge der Inversion der Bewegungen entsteht. Die Abszisse X des laufenden Punktes wird dabei durch dessen Ordinate Y ausgedrückt.

Bleiben wir bei Abbildung 5, wobei der Schraubengang der auf dem betrachteten Zylinder gelegenen Schraubenlinie dem Schraubengang T der zu ermittelnden Oberfläche eines bestimmten Werkzeugs gleich sein soll. Wir ermitteln den Zusammenhang zwischen der Änderung der Ordinate Y des Schnittpunktes der Schraubenlinie mit der Basisebene und dem entsprechenden Winkel der Umdrehung des Werkzeugs um die O_1Z -Achse. Während das Werkzeug um die O_1Z -Achse rotiert, gleitet dieser Schnittpunkt entlang der Ellipse (7), deren Gleichung wir der Einfachheit halber als

$$\frac{X^2}{r^2} + \frac{Y^2}{\frac{r^2}{\sin^2 \varrho}} = 1 \quad (10)$$

umschreiben.

Offenbar gilt für den Punkt der Ellipse mit Koordinaten φ, z auf der Abwicklung der Mantelfläche des Zylinders (Abbildung 6) $X = r \sin \varphi$. Folglich gilt für die Ordinate dieses Punktes

$$Y = \pm \sqrt{\frac{r^2}{\sin^2 \varrho} \left(1 - \frac{X^2}{r^2} \right)} = \pm \sqrt{\frac{r^2}{\sin^2 \varrho} \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{r^2} \right)} = \pm \frac{r \cos \varphi}{\sin \varrho}.$$

Unter Berücksichtigung des Ursprungs und der Richtung des Winkels φ erhält man

$$\begin{cases} X = r \sin \varphi \\ Y = \frac{r \cos \varphi}{\sin \varrho} \end{cases} \quad (11)$$

Der Rotation des Werkzeugs entspricht eine Parallelverschiebung der Geradenschar, während die Linie (5) unbeweglich bleibt.

Eine der Geraden der Schar, auf welche die Schraubenlinie abgebildet wird, soll momentan durch den Punkt $(\varphi_0, Z_1(\varphi_0))$ verlaufen. Dieselbe Gerade soll nach einer Umdrehung der entsprechenden Schraubenlinie um die O_1Z -Achse um einen Winkel ϕ in Richtung der Rotation des Werkzeugs durch den Punkt $(\varphi_1, Z_1(\varphi_1))$ verlaufen. Handelt es sich um eine Schraubenlinie mit Linkssteigung, so entspricht einer solchen Umdrehung bei fixierten φ ein Zuwachs $+\phi r \tan \omega$ der Koordinate Z für alle die Schar bildenden Geraden. Bei Rechtssteigung ist der entsprechende Zuwachs $-\phi r \tan \omega$.

Die Gleichungen der durch die Punkte $(\varphi_0, Z_1(\varphi_0))$ und $(\varphi_1, Z_1(\varphi_1))$ verlaufenden Geraden sind dementsprechend

$$\frac{Z - Z_1(\varphi_0)}{\varphi - \varphi_0} = r \tan \omega \quad \text{bzw.} \quad \frac{Z - Z_1(\varphi_1)}{\varphi - \varphi_1} = r \tan \omega$$

oder

$$Z = Z_1(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) r \tan \omega \quad \text{bzw.} \quad Z = Z_1(\varphi_1) + (\varphi - \varphi_1) r \tan \omega.$$

Für den entlang der Z -Achse gemessenen Abstand zwischen den beiden Geraden ergibt sich daher

$$Z_1(\varphi_1) - Z_1(\varphi_0) - (\varphi_1 - \varphi_0) r \tan \omega.$$

Setzt man für $Z_1(\varphi_1)$ und $Z_1(\varphi_0)$ die Ausdrücke gemäß Gleichung (5) ein, erhält man für eine Schraubenlinie mit Linkssteigung

$$\phi r \tan \omega = -r \cot \mathcal{G} \cos \varphi_1 + r \cot \mathcal{G} \cos \varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0) r \tan \omega$$

bzw.

$$\phi = \frac{(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \cot \mathcal{G} - (\varphi_1 - \varphi_0) \tan \omega}{\tan \omega} \quad (12.1)$$

und für eine Schraubenlinie mit Rechtssteigung

$$-\phi r \tan \omega = -r \cot \mathcal{G} \cos \varphi_1 + r \cot \mathcal{G} \cos \varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0) r \tan \omega$$

bzw.

$$\phi = -\frac{(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \cot \mathcal{G} - (\varphi_1 - \varphi_0) \tan \omega}{\tan \omega}. \quad (12.2)$$

Es soll noch der Wert des Winkels ϕ durch den Wert Y der entsprechenden Ordinate dargestellt werden. Aus (11) erhält man für die Punkte der negativen Ellipsenhälfte

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{Y \sin \mathcal{G}}{r}\right) = \pi - \arccos \frac{Y \sin \mathcal{G}}{r} \quad (13.1)$$

und für die Punkte der positiven Ellipsenhälfte

$$\varphi = 2\pi - \arccos\left(-\frac{Y \sin \mathcal{G}}{r}\right) = \pi + \arccos \frac{Y \sin \mathcal{G}}{r}. \quad (13.2)$$

Entspricht der Winkel φ_0 der Ordinate Y_0 und der Winkel φ_1 der Ordinate Y_1 , so erhält man aus den vorangehenden Beziehungen für Punkte der negativen Hälfte der Ellipse

$$\phi = \pm \left[\frac{(Y_1 - Y_0) \cos \mathcal{G}}{r \tan \omega} + \arccos \frac{Y_1 \sin \mathcal{G}}{r} - \arccos \frac{Y_0 \sin \mathcal{G}}{r} \right]$$

und für Punkte auf der positiven Hälfte der Ellipse

$$\phi = \pm \left[\frac{(Y_1 - Y_0) \cos \mathcal{G}}{r \tan \omega} - \arccos \frac{Y_1 \sin \mathcal{G}}{r} + \arccos \frac{Y_0 \sin \mathcal{G}}{r} \right].$$

In beiden Formeln entspricht das Vorzeichen „+“ einer linkssteigenden Schraubenlinie, das Vorzeichen „-“ einer rechtssteigenden.

In Tabelle 1 sind die soeben gewonnenen Ergebnisse unter Berücksichtigung der Beziehungen $a = \frac{r}{\sin \mathcal{G}}$

und $r \tan \omega = \frac{T}{2\pi}$ zusammengefasst.

Steigung des Werkzeugs	Querschnitts-Hälfte	ϕ	
links	positiv	$\arccos \frac{Y_0}{a} - \arccos \frac{Y_1}{a} + \frac{Y_1 - Y_0}{T} 2\pi \cos \mathcal{G}$	(14.1.1)
	negativ	$\arccos \frac{Y_1}{a} - \arccos \frac{Y_0}{a} + \frac{Y_1 - Y_0}{T} 2\pi \cos \mathcal{G}$	(14.1.2)
rechts	positiv	$\arccos \frac{Y_1}{a} - \arccos \frac{Y_0}{a} - \frac{Y_1 - Y_0}{T} 2\pi \cos \mathcal{G}$	(14.1.3)
	negativ	$\arccos \frac{Y_0}{a} - \arccos \frac{Y_1}{a} - \frac{Y_1 - Y_0}{T} 2\pi \cos \mathcal{G}$	(14.1.4)

Tabelle 1

Bei Verwendung der Formeln (14.1.1) bis (14.1.4) entspricht ein positives Ergebnis einer Umdrehung der Schraubenlinie um die O_1Z -Achse in Richtung der Rotation des Werkzeugs, ein negatives Ergebnis entspricht einer Umdrehung in entgegengesetzter Richtung. Es soll betont werden, dass diese Formeln nur dann gelten, wenn der Schnittpunkt der Schraubenlinie und der Basisebene bei dessen Bewegung innerhalb einer Hälfte – entweder der positiven oder negativen – der Ellipse bleibt.

Von nun an soll einer Umdrehung des betrachteten Zylinders um die O_1Z -Achse um einen Winkel ϕ in der angenommenen Richtung der Rotation des Werkzeugs ein Zuwachs $k\phi$ des Winkels Ψ entsprechen, wobei $k > 0$ ein konstanter (von ϕ unabhängiger) Faktor ist.

Nun soll eine Hilfsformel herumgezogen werden. Betrachten wir eine Ellipse mit Hauptachse a und Nebenachse b sowie einen Kreis mit Radius ρ , dessen Mittelpunkt im Abstand L vom Mittelpunkt der Ellipse auf der Verlängerung ihrer Nebenachse gelegen ist (Abbildung 8).

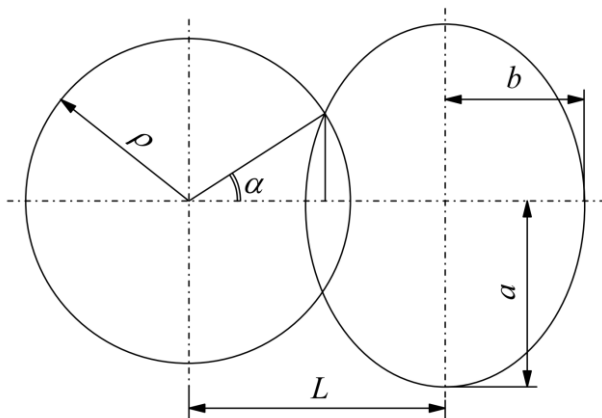


Abbildung 8

Sind die Ungleichungen $0 < L - \rho < b < L$ erfüllt, so schneiden sich der Kreis und die Ellipse genau in zwei Punkten. Wir wollen den Winkel α zwischen der Nebenachse der Ellipse und der Richtung vom Mittelpunkt des Kreises zu einem der Schnittpunkte ermitteln. Legen wir die Koordinatenachsen über die Achsen der Ellipse, so gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{(\rho \sin \alpha)^2}{a^2} + \frac{(L - \rho \cos \alpha)^2}{b^2} = 1,$$

bzw. nach einigen Umformungen

$$\rho^2 (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha - 2a^2 L \rho \cos \alpha + a^2 L^2 + b^2 \rho^2 - a^2 b^2 = 0. \tag{15}$$

Wenn wir Gleichung (15) nach $\cos \alpha$ auflösen und $b = a \sin \vartheta$ annehmen, erhalten wir

$$\cos \alpha = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - (\rho^2 - a^2) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}}{\rho \cos^2 \vartheta}. \tag{16}$$

Gleichung (16) ist offensichtlich nur für den negativen Wert der Quadratwurzel lösbar und man erhält

$$\alpha = \pm \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho^2 - a^2) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}}{\rho \cos^2 \vartheta}. \tag{17}$$

Aus den gewonnenen Ergebnissen folgen die Grundgleichungen des dargestellten Verfahrens. Im Einklang mit dem entworfenen Lösungsplan führen wir in der Basisebene die Polarkoordinaten ζ, ρ ein, deren Pol mit dem Punkt O und deren Achse mit der Ox -Achse zusammenfällt. Der Winkel ζ ist entgegen dem Uhrzeigersinn positiv definiert.

Die beim Schnitt des betrachteten Zylinders mit der Basisebene entstandene Ellipse bei einem gewissen Wert Ψ_0 des Winkels Ψ soll durch den Punkt (ζ_0, ρ_0) verlaufen. Misst man jetzt den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn, so müssen die Beziehungen (18) und (19) gelten:

$$\zeta_0 - \Psi_0 = \alpha_0 = \pm \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_0^2 - a^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_0 \cos^2 \vartheta}, \quad (18)$$

$$\Psi_0 = \zeta_0 - \alpha_0 = \zeta_0 \mp \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_0^2 - a^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_0 \cos^2 \vartheta}, \quad (19)$$

wobei a die Hauptachse der betrachteten Ellipse ist.

Der aktuelle Wert der Ordinate Y des Punktes (ζ_0, ρ_0) ist für die in Abbildungen 7.2 und 7.3 dargestellten Fälle

$$Y_0 = \rho_0 \sin \alpha_0 \quad (20.1)$$

und für die in Abbildungen 7.1 und 7.4 dargestellten Fälle

$$Y_0 = -\rho_0 \sin \alpha_0. \quad (20.2)$$

Wir legen bei demselben Zylinder und derselben Ellipse auf die Zylindermantelfläche durch den Punkt der Ellipse mit Ordinate $Y = Y_0$ eine rechts- bzw. linkssteigende Schraubenlinie mit Schraubengang T . Als nächstes ermitteln wir einen Ausdruck für den Wert Ψ_1 des Winkels Ψ , bei dem die Ordinate Y des Schnittpunkts der betrachteten Schraubenlinie und Ellipse gleich Y_1 ist, als Funktion der Größe Y_1 . Dazu berechnen wir mit Hilfe von (14) den Winkel der Umdrehung des Werkzeugs, die eine Verschiebung des Schnitts der Schraubenlinie und der Ellipse vom Punkt mit Ordinate Y_0 nach dem der Ordinate Y_1 entsprechenden Punkt bewirkt. Dabei sind Verschiebungen innerhalb einer bestimmten Hälfte der Ellipse (entweder der positiven oder der negativen) gemeint. Multipliziert man den ermittelten Winkel der Umdrehung des Werkzeugs mit k und addiert das Ergebnis zum mittels Gleichung (19) errechneten Wert Ψ_0 , so erhält man Ψ_1 .

Entsprechend der Anzahl der Formeln (9) und der Anzahl der Formeln (14) entstehen dabei insgesamt acht mögliche Varianten der zu ermittelnden Gleichung. Wir beschränken uns auf den Fall der Formeln (14.1.1) und (9.1), dementsprechend bezeichnen wir die neu gewonnene Formel mit der Nummer (21.1):

$$\Psi_1 = \zeta_0 - \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_0^2 - a^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_0 \cos^2 \vartheta} \cdot \text{sign } Y_0 + k \left(\arccos \frac{Y_0}{a} - \arccos \frac{Y_1}{a} + \frac{Y_1 - Y_0}{T} 2\pi \cos \vartheta \right). \quad (21.1)$$

In gleicher Weise erhält man aus den übrigen Kombinationen 7 weitere, hier nicht dargestellte Formeln, welche die Nummern (21.2) bis (21.8) erhalten. In jeder dieser Formeln wird je nach Fall ein mittels der Formeln (20.1), (20.2) errechneter Wert Y_0 substituiert.

Ersetzt man nun in Gleichung (21.1) bzw. in einer der 7 nicht dargestellten Formeln Y_1 durch den laufenden Wert Y und substituiert den ermittelten Ausdruck für Ψ in die entsprechenden der Formeln (9.1), (9.2), so

erhält man die Ausdrücke für die Koordinaten x, y des auf der Ellipse gelegenen Punkts, dessen Ordinate Y ist. Diese Ausdrücke stellen nichts anderes dar als parametrische Gleichungen der durch den Punkt (ζ_0, ρ_0) verlaufenden Laufbahn des Schnittpunkts der auf dem betrachteten Zylinder gelegenen Schraubenlinie mit der Basisebene, wobei Y die Rolle des veränderlichen Parameters einnimmt.

Die beim konkreten Profilieren eines Werkzeugs zu verwendende Formel hängt von der Bearbeitung ab, nämlich ob

- die Oberfläche des Werkzeugs mit Links- oder Rechtssteigung ausgeführt sein soll,
- die negative oder die positive Hälfte des Querschnitts des Werkzeugs aktiv sein soll,
- die Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten des Werkstücks und des Werkzeugs einen spitzen oder einen stumpfen Winkel miteinander bilden sollen.

Die Richtungen letzterer werden durch die Vektoren $\overline{O_1Z}$ bzw. \overline{Oz} bestimmt.

Offensichtlich gibt es 8 mögliche Bearbeitungsvarianten. Jeder dieser 8 Varianten muss eine der 8 möglichen Varianten der Gleichung der Laufbahn des Schnittpunkts der Schraubenlinie und der Basisebene eindeutig zugewiesen werden. Nachstehend sind als Beispiel die der Formel (21.1) entsprechenden Gleichungen (22.1) aufgeführt, wobei Y_1 durch Y ersetzt wurde.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \left(L - \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \vartheta \right) \cos \Psi - Y \sin \Psi \\ y = \left(L - \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \vartheta \right) \sin \Psi + Y \cos \Psi \\ \Psi = \zeta_0 - \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_0^2 - a^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_0 \cos^2 \vartheta} \operatorname{sign} Y_0 + \\ \quad + k \left(\arccos \frac{Y_0}{a} - \arccos \frac{Y}{a} + \frac{Y - Y_0}{T} 2\pi \cos \vartheta \right) \end{array} \right. \quad (22.1)$$

Gleichungen (22.1) gelten für den Fall eines Werkzeugs mit linkssteigender Oberfläche, dessen positive Hälfte des Querschnitts aktiv ist und dessen Winkelgeschwindigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit des Werkstücks einen stumpfen Winkel bildet. Der Ausdruck Ψ aus (22.1) ist dabei in die Bestimmungsformeln für x und y einzusetzen, Y behält die Rolle des zu verändernden Parameters. Analog erfolgt die Ableitung der 7 verbleibenden, hier nicht explizit dargestellten Formeln mit der Nummerierung (22.2) bis (22.8) für die anderen möglichen Bearbeitungskombinationen.

Nun wechseln wir von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten, da diese besser für die Beschreibung des auf dem Werkstück zu erzeugenden Profils geeignet sind. Es gelten die Beziehungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \arctan \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} (2 - \operatorname{sign} y - \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{sign} y) \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right. \quad (23)$$

Substituiert man in (23) für den gewählten Bearbeitungsfall die entsprechenden Ausdrücke für x und y (Gleichungen (22.1) bis (22.8)), so entstehen parametrische Gleichungen der Laufbahn des Schnittpunkts, diesmal allerdings in Polarkoordinaten. Der veränderliche Parameter ist nach wie vor Y . Dabei gilt in jedem Fall:

$$\rho = \sqrt{Y^2 \cos^2 \vartheta + L^2 - 2L \sqrt{a^2 - Y^2} \sin \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (24)$$

Im Einklang mit dem entworfenen Plan nehmen wir jetzt an, dass das zu bearbeitende Profil durch seine Gleichung $\rho = \bar{\rho}(\zeta)$ in den Polarkoordinaten ρ, ζ definiert ist und $\bar{\rho}(\zeta_0) = \rho_0$ gilt. Wir nehmen außerdem

an, dass der Wert der Ableitung $\bar{\rho}'_{\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0}$ bekannt ist. Seien bei einem gewissen a die parametrischen Gleichungen der den Punkt (ζ_0, ρ_0) enthaltenden Laufbahn des Schnittpunkts der Schraubenlinie und der Basisebene im selben Koordinatensystem $\zeta = \zeta(Y), \rho = \rho(Y)$. Dann muss die Gleichung

$$\frac{d\rho}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = \frac{\frac{d\rho}{dY} \Big|_{Y=Y_0}}{\frac{d\zeta}{dY} \Big|_{Y=Y_0}} \quad (25)$$

gelten, wobei Y_0 der aus der entsprechenden der Formeln (20.1) bzw. (20.2) bei $\zeta = \zeta_0$ ermittelte Wert des Parameters Y ist. Soll die Laufbahn des Schnittpunkts der Schraubenlinie und der Basisebene das zu erzeugende Profil im Punkt (ζ_0, ρ_0) berühren, so muss die Gleichung

$$\frac{\frac{d\rho}{dY} \Big|_{Y=Y_0}}{\frac{d\zeta}{dY} \Big|_{Y=Y_0}} = \frac{d\bar{\rho}}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0} \quad (26)$$

gelten. Den Ausdruck für den Zähler des linken Bruches von (26) erhält man als Ableitung des Ausdrucks (24) nach Y . Um den Ausdruck für den Nenner des Bruchs zu ermitteln, substituiert man in den Ausdruck (23) für ζ statt x und y die entsprechenden der (teilweise nicht dargestellten) Ausdrücke (22.1) bis (22.8). Der so gewonnene Ausdruck kann nach Y abgeleitet werden. In beiden für die Ableitungen gewonnenen Ausdrücken soll Y_0 für Y substituiert werden. Nach einfachen, hier nicht dargestellten Berechnungen erhält man Formeln, die entsprechend der vorangehenden mit (27.1) bis (27.8) nummeriert werden können, z.B.

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = \frac{Y_0 \left(\sqrt{a^2 - Y_0^2} \cos^2 \vartheta + L \sin \vartheta \right) \rho_0}{k \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - Y_0^2}} + \frac{2\pi \cos \vartheta}{T} \right) \rho_0^2 \sqrt{a^2 - Y_0^2} + L \sqrt{a^2 - Y_0^2} - a^2 \sin \vartheta}, \quad (27.1)$$

wobei gilt

$$\rho_0 = \sqrt{Y_0^2 \cos^2 \vartheta + L^2 - 2L\sqrt{a^2 - Y_0^2} \sin \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta} \quad (28)$$

und

$$Y_0 = \pm \bar{\rho}(\zeta_0) \sin \left\{ \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - [\bar{\rho}^2(\zeta_0) - a^2] \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}}{\bar{\rho}(\zeta_0) \cos^2 \vartheta} \right\}. \quad (29)$$

ρ_0 ist nichts anderes als der Wert des Polarradius des betreffenden Punkts des zu erzeugenden Profils und braucht somit nicht berechnet werden. Der Ausdruck für Y_0 folgt aus den Formeln (17) und (20.1), (20.2).

Kennt man für irgendeinen Wert des Polarradius den entsprechenden Wert seiner Ableitung nach dem Polarkwinkel, so kann aus der passenden der Gleichungen (27.1) bis (27.8) der Wert a , d.h. die Größe der Hauptachse der dem gewählten Punkt des zu erzeugenden Profils entsprechenden Ellipse ermittelt werden. Somit findet man für jeden beliebigen Punkt des zu erzeugenden Profils den Radius des mit dem zu profilierenden Werkzeug koaxialen Zylinders, auf dessen Oberfläche die Schraubenlinie gelegen sein soll, die den betreffenden Punkt erzeugen kann. Dies stellt eine notwendige, aber keineswegs hinreichende Bedingung dafür dar, dass der ermittelte Radius geeignet ist. Bereits das am Anfang des Aufsatzes angeführte Beispiel zeigt, dass sich zwei Linien auch in einem Berührungspunkt (oder auch anderen Punkten) schneiden können. Dies ist offenbar unzulässig. Deshalb muss jeder ermittelte Wert a auf Zulässigkeit überprüft werden.

Die Vorgehensweise, wie diese Prüfung durchgeführt werden kann, ist offensichtlich, wenn man sich daran erinnert, dass (22.1) bis (22.8) die Gleichungen der Laufbahn des bereits mehrfach erwähnten Schnittpunkts sind. Wählt man nämlich einen beliebigen Wert des Polarkwinkels ζ und substituiert in die erste der Gleichungen (23) statt x und y die entsprechenden Ausdrücke aus den Gleichungen der Laufbahn, so entsteht eine Gleichung für Y . In dieser Gleichung bedeutet ρ_0 den Polarradius des Punkts, für den a ermittelt wurde, für Y_0 aber soll (29) eingesetzt werden. Kennt man jetzt Y , so ermittelt man die entsprechenden Werte x und y und den Polarradius des dem gewählten Wert ζ entsprechenden Punktes der Laufbahn. Gilt die Ungleichung $\rho(\zeta) > \bar{\rho}(\zeta)$, so hat der ermittelte Wert a die aktuelle Überprüfung bestanden und man kann diese entweder für weitere Punkte des Profils fortsetzen⁴ oder den betreffenden Wert a als gültig akzeptieren. Ansonsten muss der Wert für a als unzulässig angesehen werden.

Kann für einen Punkt des zu erzeugenden Profils kein gültiger Wert a ermittelt werden, so kann dieser Punkt bei dem gewählten Bearbeitungsschema nicht erreicht werden, ohne dass irgendwelche anderen Punkte des Profils dabei abgetrennt werden.

Bei der Definition des verschieblichen Koordinatensystems wurde bereits darauf hingewiesen, dass im Allgemeinen die während der Rotation des Werkzeugs nacheinander in die Basisebene geratenden Querschnitte nicht identisch sind. Um sich beim Wiederaufbau des zu ermittelnden Profils des Werkzeugs auf diese Punkte stützen zu können, müssen dieselben an einen fixierten Querschnitt „reduziert“ werden. Als solchen Querschnitt wählt man gewöhnlich den Stirnschnitt oder den Axialschnitt, welche sich bei der erwähnten Rotation des Werkzeugs nicht ändern.

Um den Grundgedanken dieser Reduktion zu erklären, kommen wir auf die Abbildungen 5 und 6 zurück und erinnern uns an das eingeführte Polarkoordinatensystem ζ, ρ . Liege der für den Punkt (ζ_1, ρ_1) des zu erzeugenden Profils ermittelte Punkt der Oberfläche des Werkzeugs auf der Ellipse, deren Hauptachse a_1 ist, in

der Basisebene und sei Y_1 die Ordinate dieses Punktes im verschieblichen Koordinatensystem. Aus Abbildung 5 erkennt man unmittelbar, dass für die Punkte der Ellipse $Z = Y \cos \mathcal{G}$ gilt. Außerdem gilt für die Punkte der negativen Hälfte der Ellipse $\phi = \pi - \arccos \frac{Y}{a}$, wobei a die Hauptachse der Ellipse ist. Liegt der betreffende

Punkt auf der positiven Ellipsenhälfte, so gilt $\phi = \pi + \arccos \frac{Y}{a}$.

Aus den letzten Gleichungen folgt, dass das Bild der durch den ermittelten Punkt verlaufenden Schraubenlinie

in Abbildung 6 durch den Punkt $\left(\pi, Y_1 \cos \mathcal{G} - \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{Y_1}{a_1} \right)$ bzw. $\left(\pi, Y_1 \cos \mathcal{G} + \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{Y_1}{a_1} \right)$ verläuft.

⁴ Wenn die Laufbahn einen Punkt des gegebenen Profils nicht abtrennt, so kann dies für einen anderen dennoch der Fall sein. Es reicht daher im Allgemeinen nicht aus, die Überprüfung nur für einen Punkt durchzuführen.

Der eben betrachtete Punkt soll an den für (ζ_0, ρ_0) des zu erzeugenden Profils ermittelten Punkt reduziert werden, der in der Basisebene auf der Ellipse liegt, deren Hauptachse a_0 ist. Wie aus der Formel (19) folgt, entspricht im Augenblick der Entstehung des ersteren der Polarwinkel

$$\Psi_1 = \zeta_1 \mp \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_1^2 - a_1^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_1 \cos^2 \vartheta},$$

im Augenblick der Entstehung des letzteren aber

$$\Psi_0 = \zeta_0 \mp \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_0^2 - a_0^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_0 \cos^2 \vartheta}.$$

Folglich trennt die Augenblicke der Entstehung der beiden Punkte voneinander eine Umdrehung des Werkstücks um den Winkel $\Psi_0 - \Psi_1$, was der Umdrehung des Werkzeugs um seine Achse um den Winkel

$$\varphi_{01} = \frac{\Psi_0 - \Psi_1}{k} = \frac{1}{k} \left[\zeta_0 - \zeta_1 \mp \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_0^2 - a_0^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_0 \cos^2 \vartheta} \pm \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_1^2 - a_1^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_1 \cos^2 \vartheta} \right]$$

entspricht. Nach dieser Umdrehung gilt für den „reduzierten“ Punkt

$$Z_{1red} = Y_1 \cos \vartheta + \left\{ \frac{1}{k} \left[\zeta_0 - \zeta_1 \mp \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_0^2 - a_0^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_0 \cos^2 \vartheta} \pm \arccos \frac{L - \sqrt{L^2 - (\rho_1^2 - a_1^2) \cos^2 \vartheta} \sin \vartheta}{\rho_1 \cos^2 \vartheta} \right] - \arccos \frac{Y_1}{a_1} \right\} \frac{T}{2\pi} \quad (30)$$

Ist eine ausreichend große Zahl der ermittelten Punkte „reduziert“ worden, so kann der Axialschnitt der zu ermittelnden Oberfläche des Werkzeugs mit hinreichender Genauigkeit wieder aufgebaut werden. Kennt man den Axialschnitt, so lässt sich leicht der Stirnschnitt erzeugen. Somit sind wir zur Lösung des Problems der Profilierung eines Wälzwerkzeugs gelangt.

4. Beispiele zur Anwendung des Verfahrens

Die Anwendung des dargelegten Verfahrens soll im Folgenden an Beispielen demonstriert werden.

Als Gegenstand der betrachteten Beispiele soll ein Zahnrad mit Normprofil, Modul $m=5\text{mm}$ und 53 Zähnen dienen. Wie bereits angemerkt wurde, braucht die Zahnflanke eines solchen Rades theoretisch keine Fußrundung zu haben. Davon gehen wir bei der Angabe des Profils im Stirnschnitt des Rades aus. Dieses Profil soll vom Steigungswinkel der Zähne unabhängig sein. Ebenfalls wurde bereits erwähnt, dass ein Wälzfräser streng genommen kein universelles Werkzeug darstellt, sondern für jedes Rad individuell profiliert werden muss. Dies soll durch die angeführten Beispiele nachgewiesen werden. Es wird dabei angenommen, dass alle Werkzeuge,

deren Profile ermittelt werden, mit Linkssteigung ausgeführt sind. Es handelt sich immer um eingängige Schraubenflächen, deren Schraubengang zu $T=15,742\text{mm}$ gewählt wurde. Der Achsabstand des Werkstücks und des Werkzeugs soll immer $170,6\text{mm}$ betragen. Bei solcher Wahl des Achsabstands berührt der Teilzylinder des zu erzeugenden Rads den Teilzylinder des genormten Wälzfräasers. Der Steigungswinkel der Zähne des letzteren auf dessen Teilzylinder ist $3^{\circ}46'$.

Abbildung 9 zeigt das zu erzeugende Profil, auf dem die Punkte 1 bis 21 gekennzeichnet sind, für welche die entsprechenden Punkte des Axialschnitts des Werkzeugs ermittelt werden sollen. Die Fußrundungen sind nicht dargestellt, da ihre Form abhängig vom gewählten Bearbeitungsschema ist.

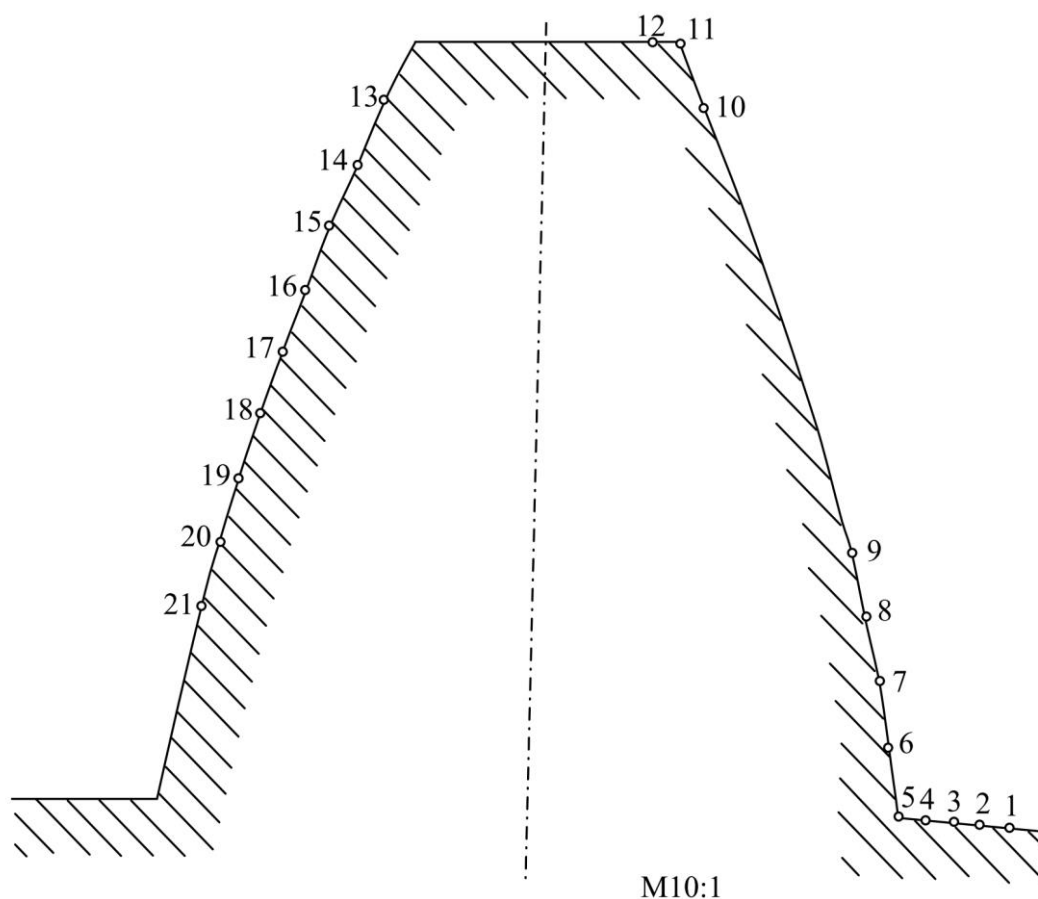


Abbildung 9

Als erstes Beispiel wurde das Profil des für die Bearbeitung eines geradverzahnten Rads bestimmten Werkzeugs errechnet. Die Achsen des Werkstücks und des Werkzeugs sollen den Winkel $90^{\circ} - 3^{\circ}46' = 86^{\circ}14'$ bilden. Bei der Bearbeitung soll die positive Hälfte des Querschnitts des Werkzeugs aktiv sein und die Vektoren der Winkelgeschwindigkeiten des Werkzeugs und des Werkstücks sollen einen spitzen Winkel bilden. Die Koordinaten der mit dem vorgestellten Verfahren ermittelten Punkte des Profils des Werkzeugs sind in Tabelle 2 zusammengefasst. Die Nummern der Punkte in der Tabelle entsprechen denen in der Abbildung 9, wobei die Punkte, deren Nummern in der Tabelle fehlen, für das Werkzeug unerreichbar bleiben, nämlich von unvermeidlichen Fußrundungen „verdeckt“ sein müssen. Alle der jeweiligen Zahnflanke entsprechenden Punkte liegen annähernd auf einer Geraden. Zur Ermittlung dieser Ausgleichsgeraden wurde die Methode der kleinsten Quadrate angewandt.

Nr.	Z	Y
1	-3,9355	11,250
2	11,374	11,250
3	10,941	11,250
7	10,156	10,073
8	9,6774	8,765
9	9,2477	7,589
10	6,9525	1,290
11	6,6845	0,555
12	5,8718	0,000

Nr.	Z	Y
13	1,7819	1,290
14	1,5048	2,056
15	1,2128	2,855
16	0,90785	3,694
17	0,58563	4,577
18	0,24495	5,513
19	-0,12078	6,512
20	-0,51349	7,589
21	-0,94307	8,765

Tabelle 2

Die Abbildung 10 stellt das auf diese Weise ermittelte Profil des Axialschnitts des zu profilierenden Werkzeugs dar. Die Nummern der Punkte in dieser Abbildung stimmen mit den Nummern in der Abbildung 9 überein.

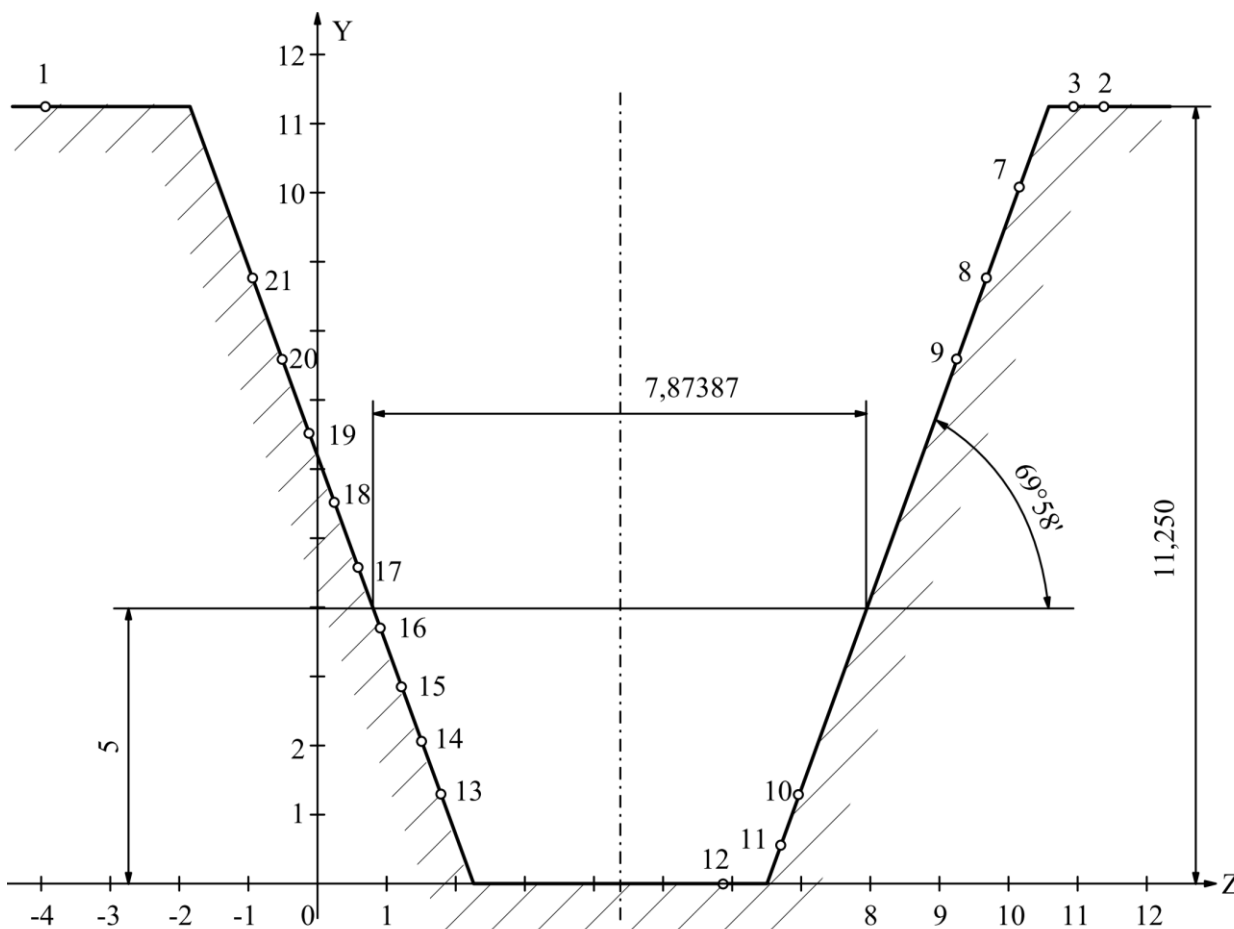


Abbildung 10

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass das ermittelte Profil nur wenig vom genormten abweicht. Dies bekräftigt die Richtigkeit des dargestellten Verfahrens und regt zu weiteren Berechnungen an.

Als größter Vorteil des geschilderten Verfahrens erscheint die Möglichkeit, den Einfluss des Winkels, den die Achsen des Werkstücks und des Werkzeugs miteinander bilden, auf das Profil des Werkzeugs genau abzuschätzen. Um diesen Vorteil ausnutzen zu können, wurde das Profil des Werkzeugs bei unverändertem Stirnschnitt des zu erzeugenden Zahnrads, unverändertem Achsabstand des Werkstücks und des zu profilierenden Werkzeugs und demselben Schraubengang des Werkzeugs für zwei weitere Fälle berechnet, wobei es sich nun um schrägverzahnte Räder mit Rechtssteigung handelt. Im ersten Fall beträgt der Winkel zwischen Werkstück- und Werkzeugachse 75°, im zweiten Fall 60°. Die Ergebnisse der Berechnungen für beide Fälle nach

dem dargestellten Verfahren werden in den Tabellen 3 bzw. 4 zusammengefasst und in den Abbildungen 11 bzw. 12 grafisch dargestellt.

Nr.	Z	Y
1	-3,9355	11,250
2	11,373	11,250
3	10,940	11,250
7	10,656	10,764
8	10,098	9,308
9	9,5742	8,009
10	6,6913	0,951
11	6,3444	0,112
12	5,8714	0,000

Nr.	Z	Y
13	2,0430	0,951
14	1,6844	1,821
15	1,3117	2,724
16	0,92551	3,669
17	0,52003	4,659
18	0,095239	5,704
19	-0,35734	6,816
20	-0,83998	8,009
21	-1,3634	9,308

Tabelle 3

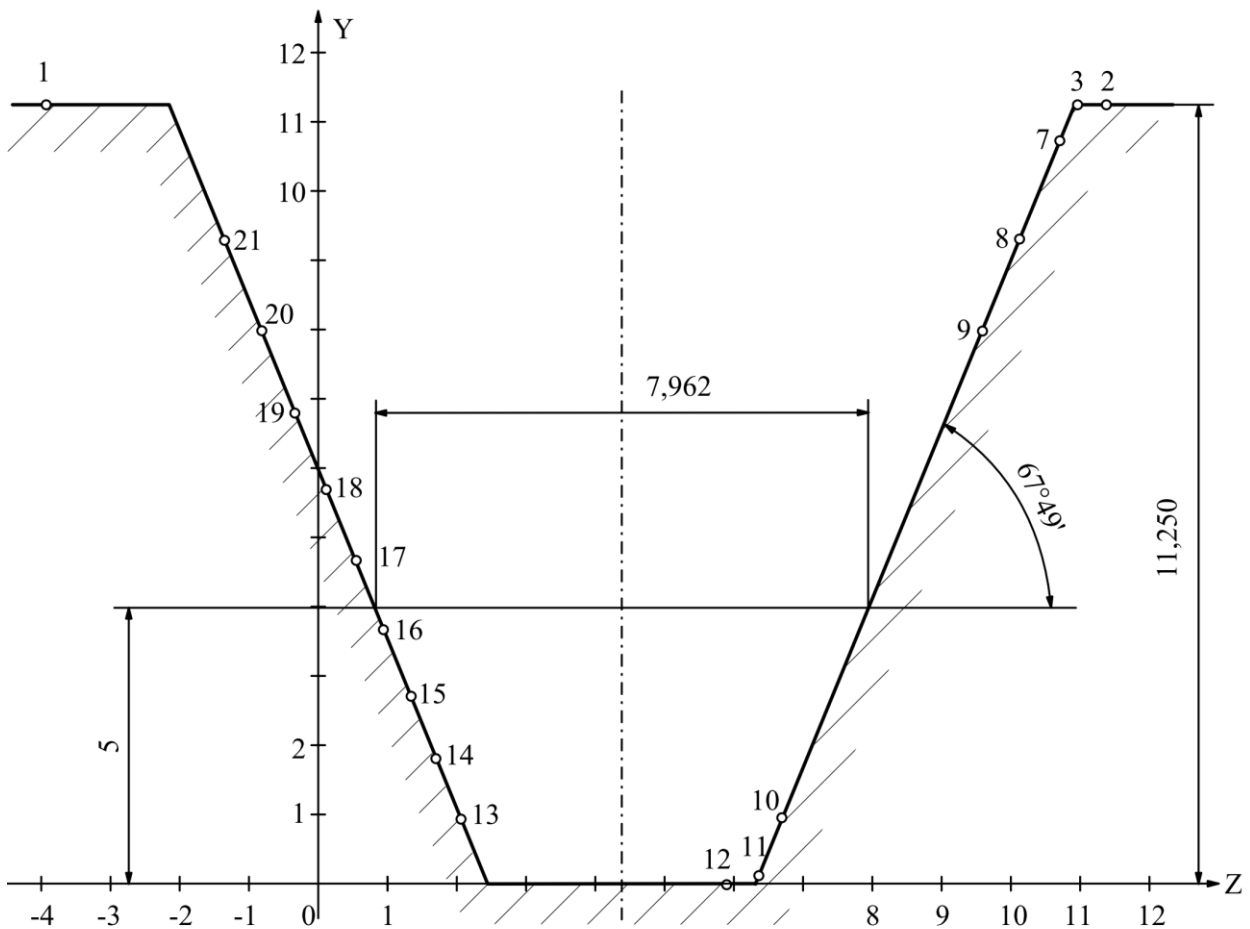


Abbildung 11

Nr.	Z	Y
9	2,624	10,506
10	-1,941	1,592
11	-2,498	0,528
12	-3,407	0,000
13	-7,882	1,592
14	-8,455	2,692

Nr.	Z	Y
15	-9,048	3,836
16	-9,662	5,031
17	-10,305	6,282
18	-10,977	7,601
19	-11,689	9,002
20	-12,446	10,506

Tabelle 4

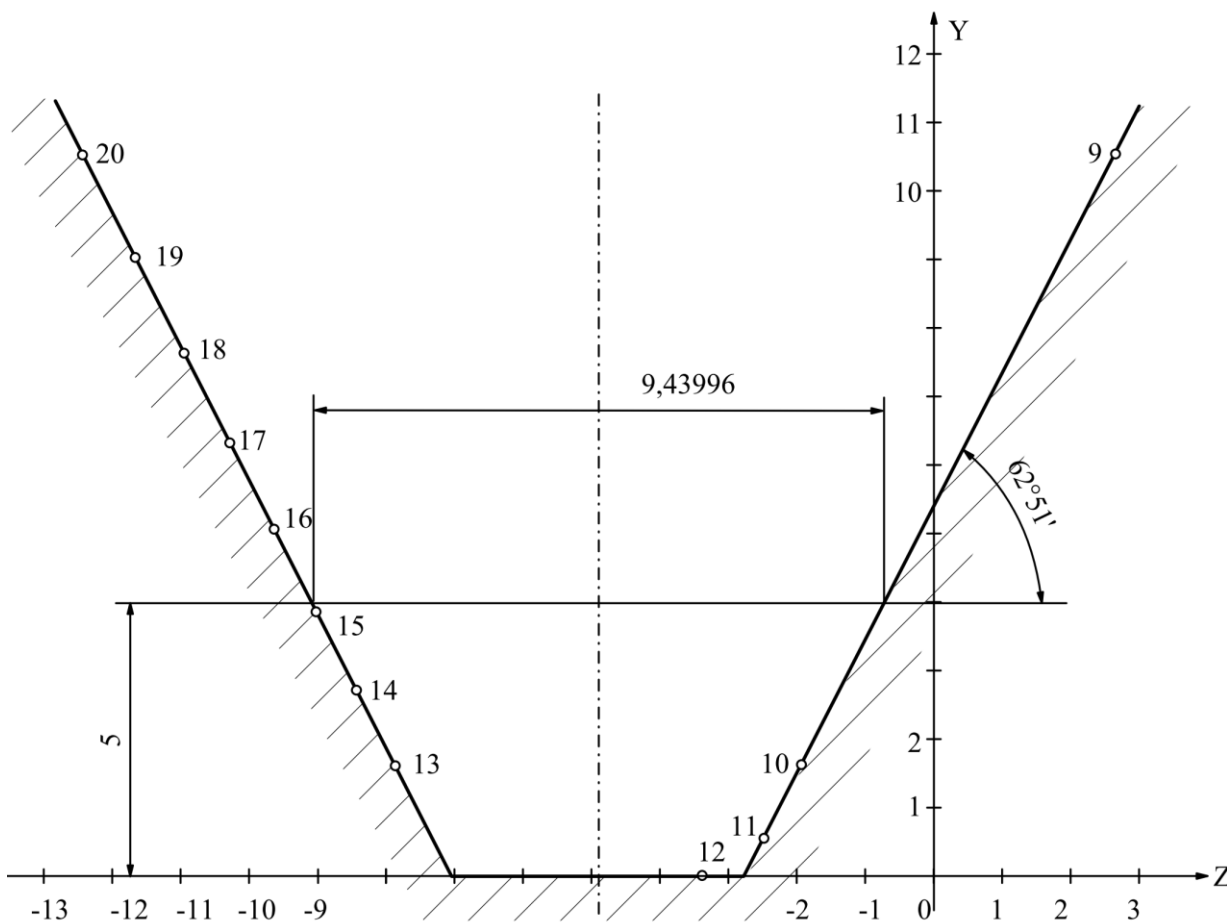


Abbildung 12

Deutlich zu erkennen sind die Abweichungen der ermittelten Profile vom Normprofil. Im Fall des 60° -Winkels sind bereits die Punkte des Fußkreises des Zahnrads für das Werkzeug unerreichbar.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Aufsatz wurde dargelegt, dass kein universelles Verfahren zur Ermittlung des Werkzeugprofils für ein vorgegebenes Werkstückprofil existiert. Ansätze, die auf der Ermittlung von Hüllkurven einer Kurven- bzw. Hüllflächen einer Oberflächenschar basieren, liefern nicht die gewünschten Ergebnisse. Der Einsatz von normierten Werkzeugprofilen, z.B. von Wälzfräsern, führt im Allgemeinen nicht auf die exakte Geometrie, sondern stellen einen Kompromiss dar.

Daher wurde ein Verfahren entwickelt, welches nach Vorgabe von Werkstückprofil, Achsenwinkel und der Relativbewegung von Werkzeug und Werkstück, sowie Steigung der Schneide auf der Ermittlung von Schraubflächen beruht, welche die Werkzeuggeometrie darstellen. Durch Rechnerunterstützung kann so das genaue Werkzeugprofil ermittelt werden. Auch kann das Verfahren genutzt werden, um Einflussgrößen des Fertigungsprozesses auf das Werkzeugprofils zu untersuchen.

So wurde in einem Beispiel gezeigt, dass bei schrägverzahnnten Zahnrädern der Schrägungswinkel erheblichen Einfluss auf die zur Fertigung notwendige Werkzeuggeometrie besitzt und ein universelles Verzahnungswerkzeug nur eine Kompromisslösung darstellt.

In einer noch folgenden Veröffentlichung werden weitere Beispiele zur Anwendung des Verfahrens dargestellt.

6. Literatur

- [1] Грубин А. Н., Лихциер М. Б. и Полоцкий М. С., *Зуборезный инструмент*, ч. 1 и 2, Машгиз, 1946 – 1947. гг. (A. Grubin, M. Lichzier, M. Polockij: Verzahnungswerkzeuge, Teil 1 und 2, 1946 – 1947)*
- [2] Кан – Каган И. И., *О решении задачи профилирования металлорежущего инструмента методом прямой обкатки*, «Вопросы механики и машиностроения», вып. 8, Рижский политехнический институт, 1969. (I. Kans-Kagans: Zur Lösung des Problems der Profilierung der Zerspanwerkzeuge mittels des direkten Abwälzens, „Probleme der Mechanik und des Maschinenbaus“, Ausgabe 8, Technische Hochschule Riga, 1969)*
- [3] Кан – Каган И. И., *Профилирование обкатного инструмента методом прямой обкатки*, «Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении», вып. 8, Рижский политехнический институт, изд – во «Зинатне», 1972. (I. Kans-Kagans: Die Profilierung der Abwälzwerkzeuge mittels des direkten Abwälzens, „Automatisierung der Herstellungsprozesse in Maschinenbau und Apparatebau“, Ausgabe 8, Technische Hochschule Riga, Verlag „Zinatne“, 1972)*
- [4] Колчин Н. И. и Литвин Ф. Л., *Методы расчета при изготовлении и контроле зубчатых изделий*, Машгиз, 1952. (N. Koltschin, F. Litvin: Berechnungsverfahren bei der Herstellung und Überprüfung von verzahnten Werkstücken, 1952)*
- [5] Котельников Ю. В., *Обработка зубьев с прямолинейным профилем методом зуботочения*, «Станки и инструмент», №7, 1953. (J. Kotelnikov: Bearbeitung von Zähnen mit geradlinigem Profil mittels Schälwälzfräsens, „Werkzeugmaschinen und Werkzeuge“, Nr. 7, 1953)*
- [6] Лашнев С. И., *Профилирование инструмента для обработки винтовых поверхностей*, Машгиз, 1965. (S. Laschnev: Profilierung von Werkzeugen für die Bearbeitung von Schraubenflächen, 1965)*
- [7] Лашнев С. И., Юликов М. И., *Расчет и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ*, «Машиностроение», 1975. (S. Laschnev, M. Julikov: Berechnung und Konstruktion von Zerspanungswerkzeugen unter Anwendung der EDV, 1975)*
- [8] Люкшин В. С., *Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов*, «Машиностроение», 1968. (V. Ljukschin: Die Theorie der Schraubenflächen im Entwerfen von Zerspanwerkzeugen, 1968)*
- [9] Рашевский П. К., *Курс дифференциальной геометрии*, 1950. (P. Raschewskij: Kurs der Differentialgeometrie, 1950)*
- [10] Романов В. Ф., *Графический и аналитический расчет обкатных инструментов*, «Станки и инструмент», №12, 1962. (V. Romanov: Graphische und analytische Berechnung von Abwälzwerkzeugen, „Werkzeugmaschinen und Werkzeuge“, Nr. 12, 1962)*
- [11] Фрайфельд И. А., *Инструменты, работающие методом обкатки*, Машгиз, 1948. (I. Freifeld: Abwälzwerkzeuge, 1948)*
- [12] Фрайфельд И. А., *Расчеты и конструкции специального металлорежущего инструмента*, Машгиз, 1959. (I. Freifeld: Berechnung und Konstruktion von speziellen Zerspanwerkzeugen, 1959)*
- [13] Цвис Ю. В., *Профиль инструмента, работающего по методу обкатки*, «Станки и инструмент», №6, 1948. (J. Cwis: Das Profil eines Wälzwerkzeugs, „Werkzeugmaschinen und Werkzeuge“, Nr. 6, 1948)*
- [14] Цвис Ю. В., *Профилирование режущего обкатного инструмента*, Машгиз, 1961. (J. Cwis: Die Profilierung von spanenden Walzwerkzeugen, 1961)*
- [15] *Программы проектирования металлорежущего инструмента, (Зуборезный инструмент)*. Минск-1967. Библиотека алгоритмов и программ для ЭВМ. (Programme zum Entwerfen von Zerspanungswerkzeugen (Verzahnungswerkzeuge). Bibliothek der Algorithmen und Programme für EDV, Minsk 1967)*

*) Zum besseren Verständnis wurden die Titel der verwendeten Literatur von den Autoren sinngemäß ins Deutsche übersetzt.