Geometrische Synthese von Verzahnungen mit windschiefen Achsen (Grenzfall)

Dipl.-Ing. Isajs Kans-Kagans

Riga, Lettland

Prof. Dr.-Ing. Michael Haas

Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg

Abstract

Die Anregung der im Nachfolgenden dargestellten Untersuchung verdanken die Verfasser Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Tremmel.
Das vorliegende Werk kann als Fortsetzung der Arbeiten [1] und [2] angesehen werden. Es handelt sich um die geometrische Synthese von Verzahnungen mit windschiefen Achsen, die aus einem schräg- und einem geradverzahnten Zahnrad bestehen. In der umfangreichen Literatur, die der Geometrie der Verzahnungen gewidmet ist (vgl. z.B. [3]-[14]), ist für diesen Fall kein einziges konkretes Beispiel zu finden.

ISSN 1867-5433 Sonderdruck Schriftenreihe der Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg Nr. 55, Nürnberg 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 3
2. Von einer Schraubenfläche zur konjugierten zylindrischen Oberfläche 4
3. Überprüfung auf Durchdringungsfreiheit 7
4. Ein Beispiel zur Anwendung des Verfahrens 8
5. Der Fall eines Kreisevolventen-Ausgangsprofils 12
6. Von einer zylindrischen Oberfläche zur konjugierten Schraubenfläche 15
7. Ein weiteres Beispiel zur Anwendung des Verfahrens 20
8. Der Fall eines Kreisevolventen-Ausgangsprofils 22
9. Literaturverzeichnis 24

1. Einleitung

Neben dem in [2] betrachteten Problem der geometrischen Synthese einer Verzahnung von zwei echten Schraubenflächen mit windschiefen Achsen ist auch das Problem der geometrischen Synthese einer aus einer echten Schraubenfläche und einer zylindrischen Oberfläche bestehenden Verzahnung denkbar. Auch in diesem Fall sollen die Achsen der Oberflächen windschief sein. Dieses Problem kann auf zweierlei Weise betrachtet werden: Man kann entweder zu einer gegebenen Schraubenfläche die zugehörige zylindrische Oberfläche ermitteln oder zu einer vorgegebenen zylindrischen Oberfläche die konjugierte Schraubenfläche bestimmen. Beide Vorgehensweisen werden in der vorliegenden Abhandlung betrachtet.

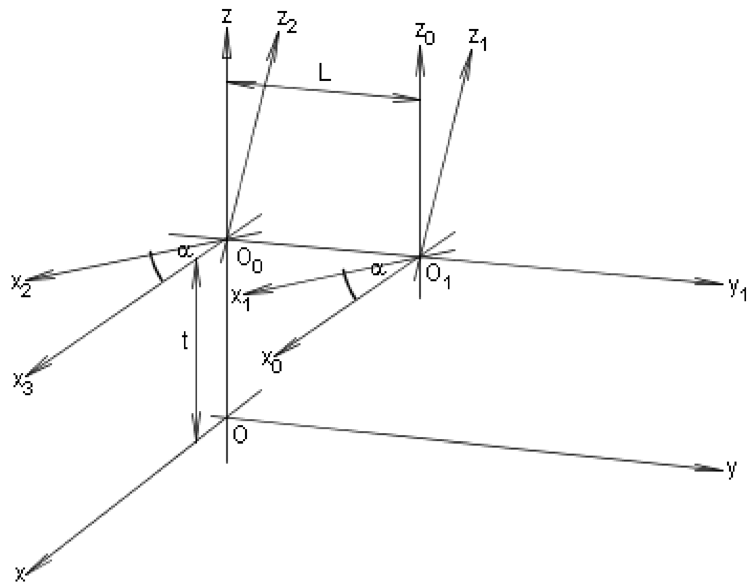

Abbildung 1

In Abbildung 1 sind die verwendeten Koordinatensysteme dargestellt. Die *Oz*-Achse stellt immer die Achse der gegebenen bzw. zu ermittelnden Schraubenfläche dar, während es sich bei der O_1z_1-Achse immer um die Rotationsachse der zu ermittelnden bzw. gegebenen zylindrischen Oberfläche handelt.
Zwischen den Koordinatensystemen *Oxyz* und $O_1x_1y_1z_1$ besteht der in den Gleichungen (1.1) und (1.2) beschriebene Zusammenhang

$$\begin{cases} x = x_3 = x_0 = x_1\cos\alpha - z_1\sin\alpha \\ y = y_1 + L \\ z = z_0 + t = x_1\sin\alpha + z_1\cos\alpha + t \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + (\ z - t\ )\sin\alpha \\ y_1 = y - L \\ z_1 = -x\sin\alpha + (\ z - t\ )\cos\alpha \end{cases} . \tag{1.2}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir im Folgenden nur Schraubenflächen mit Rechtswindung. Weiterhin wollen wir annehmen, dass die gegebene bzw. zu ermittelnde Schraubenfläche immer entgegen dem Uhrzeigersinn um die *Oz*-Achse rotiert (von positiver Achsrichtung aus betrachtet). Beide Annahmen zusammen sind äquivalent zu der Annahme, dass die Schraubenfläche immer in negativer *Oz*-Richtung („nach unten“) verschoben wird. Man kann sich deshalb die Relativbewegungen der beiden die Verzahnung bildenden Oberflächen so vorstellen, als bliebe die Schraubenfläche in Bezug auf das *Oxyz*-Koordinatensystem in Ruhe, während sich das Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ zusammen mit der gleichzeitig um die O_1z_1-Achse rotierenden zylindrischen Oberfläche in positiver *Oz*-Richtung („nach oben“) verschiebt.
Wir nehmen an, dass jeder Umdrehung der Schraubenfläche um die *Oz*-Achse um einen beliebigen Winkel ϕ eine gleichzeitige Umdrehung der zylindrischen Oberfläche um die O_1z_1-Achse um einen Winkel $k\phi$ entspricht,

wobei k einen konstanten (von ϕ unabhängigen) Faktor darstellt. Dazu ist eine Regel für die Bestimmung des Vorzeichens der Größe k erforderlich. Hierzu wählen wir die Richtungen der Vektoren $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit der Schraubenfläche und $\vec{\omega}_1$ der Winkelgeschwindigkeit der zylindrischen Oberfläche so, dass vom Zielpunkt des entsprechenden Vektors aus betrachtet jede dieser zwei Oberflächen entgegen dem Uhrzeigersinn rotiert. Dann sei $k > 0$, wenn das Tripel $\left(\vec{\omega}, \overrightarrow{O_1O}, \vec{\omega}_1\right)$ ein Rechtssystem bildet[1], ansonsten sei $k < 0$.

Mit der Zähnezahl n der Schraubenfläche und der Zähnezahl n_1 der zylindrischen Oberfläche gilt die Gleichung

$$\frac{2\pi}{n_1} = |\,k\,|\frac{2\pi}{n},$$

woraus folgt

$$|\,k\,| = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n}{n_1}.$$

2. Von einer Schraubenfläche zur konjugierten zylindrischen Oberfläche

Als erstes wird das Problem der Ermittlung einer zylindrischen Oberfläche betrachtet, die mit einer gegebenen Schraubenfläche eine regelmäßige Verzahnung bildet.
Die gegebene Schraubenfläche ist im Koordinatensystem *Oxyz* durch die Gleichungen (2.1) definiert

$$\begin{cases} x = \rho(\,\zeta\,)\cos\left(\zeta + \dfrac{2\pi}{T}\xi\right) \\ y = \rho(\,\zeta\,)\,\sin\left(\zeta + \dfrac{2\pi}{T}\xi\right), \\ z = \xi \end{cases} \tag{2.1}$$

mit den beiden unabhängigen Parametern ζ und ξ. $\rho(\zeta)$ sei die Gleichung des Stirnschnitts dieser Schraubenfläche in Polarkoordinaten mit Ursprung auf der zugehörigen Achse. ζ und ρ sind der Polarwinkel bzw. der Polarradius. ξ wird entlang der *Oz*-Achse in positiver Richtung von einer beliebigen, zur Achse senkrechten Ebene gemessen. Wir setzen voraus, dass der Winkel ζ entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen wird (von positiver Richtung der *Oz*-Achse aus betrachtet). Dann muss für eine Schraubenfläche mit Rechtswindung die Steigung T positiv sein.
In einer Anordnung, in der sich die als unbeweglich betrachtete Schraubenfläche (2.1) und die zu ermittelnde zylindrische Oberfläche berühren, muss die durch einen beliebigen Berührpunkt verlaufende Mantellinie der zylindrischen Oberfläche zur Tangentialebene der Schraubenfläche am betreffenden Punkt gehören. Insbesondere muss diese Mantellinie mit den zwei die Tangentialebene aufspannenden, nicht kollinearen Vektoren (2.2) und (2.3) komplanar sein. Die Komponenten des Richtungsvektors der O_1z_1-Achse im Koordinatensystem *Oxyz* sind $\{-\sin\alpha, 0, \cos\alpha\}$. Die analytische Bedingung der Komplanarität ist in (2.4) dargestellt.

[1] Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung von $\vec{\omega}$ und der Zeigefinger in Richtung von $\overrightarrow{O_1O}$, so zeigt der Mittelfinger in Sinne der Rechte-Hand-Regel in Richtung des Vektors $\vec{\omega}_1$.

$$\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\sin\left(\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi\right) \\ \dfrac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\cos\left(\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi\right), \\ 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} -\sin\left[\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi-\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right] \\ \cos\left[\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi-\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right], \\ 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{vmatrix} -\sin\alpha & -\dfrac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\sin\left(\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi\right) & -\sin\left[\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi-\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right] \\ 0 & \dfrac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\cos\left(\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi\right) & \cos\left[\zeta+\dfrac{2\pi}{T}\xi-\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right] \\ \cos\alpha & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \tag{2.4}$$

Aus (2.4) folgt unmittelbar

$$\xi=\frac{T}{2\pi}\left\{\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}-\zeta+\arccos\left[\frac{2\pi}{T}\frac{\rho(\zeta)\rho'(\zeta)}{\sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2+\left[\rho'(\zeta)\right]^2}}\cot\alpha\right]\right\}. \tag{2.5}$$

Beziehung (2.5) bestimmt genau jene Punkte der Schraubenfläche (2.1), in denen diese sich mit der zu ermittelnden zylindrischen Oberfläche berühren darf. Auf der der Gleichung (2.5) entsprechenden Linie[2] müssen für jede Verschiebung t die Punkte ermittelt werden, die der folgenden Bedingung genügen: Stimmt mit einem dieser Punkte bei der fixierten Verschiebung ein an die zu ermittelnde zylindrische Oberfläche gebundener Punkt überein, so berührt bei derselben Verschiebung der Vektor der Momentangeschwindigkeit des letztgenannten Punktes die Oberfläche (2.1) im selben Punkt.

Die oben erwähnte Momentangeschwindigkeit setzt sich aus zwei Komponenten zusammen: Der Geschwindigkeit der Translation des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ bezüglich des Koordinatensystems $Oxyz$ und aus der Momentangeschwindigkeit des an die zu ermittelnde Oberfläche gebundenen Punktes bezüglich des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$.

Letztere Komponente der Momentangeschwindigkeit kann analytisch bezüglich des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ als Vektorprodukt

$$\vec{v}_1=\begin{vmatrix} \vec{e}_1^{\,1} & \vec{e}_2^{\,1} & \vec{e}_3^{\,1} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}=\omega_1\left(x_1\vec{e}_2^{\,1}-y_1\vec{e}_1^{\,1}\right) \tag{2.6}$$

[2] Eigentlich handelt es sich um eine Linienschar, da die Kreisfunktionen nicht eindeutig sind.

dargestellt werden. Dabei sind $\vec{e}_1^1, \vec{e}_2^1, \vec{e}_3^1$ die Basisvektoren des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$, x_1, y_1, z_1 die momentanen Koordinaten des betreffenden Punktes bezüglich desselben Koordinatensystems und ω_1 der mit dem entsprechenden Vorzeichen versehene Betrag der momentanen Winkelgeschwindigkeit der zu ermittelnden zylindrischen Oberfläche.
Sind $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Basisvektoren des Koordinatensystems $Oxyz$, so folgt aus den Gleichungen (1.2)

$$\begin{cases} \vec{e}_1^1 = \vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_3 \sin\alpha \\ \vec{e}_2^1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3^1 = -\vec{e}_1 \sin\alpha + \vec{e}_3 \cos\alpha \end{cases}.$$

Aus denselben Formeln erhält man unter Berücksichtigung von $\omega_1 = k\,\omega$ den Ausdruck

$$\vec{v}_1 = k\,\omega\left\{ -(y-L)\vec{e}_1 \cos\alpha + \left[x\cos\alpha + (z-t)\sin\alpha \right]\vec{e}_2 - (y-L)\vec{e}_3 \sin\alpha \right\} \tag{2.7}$$

für diejenige Komponente der Momentangeschwindigkeit des betrachteten Punktes, die bei laufendem Wert t der Verschiebung des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem $Oxyz$ aufgrund der Rotation der zu ermittelnden Oberfläche entsteht. Gleichung (2.7) stellt den Vektor $\vec{v}_1$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dar.
Die Momentangeschwindigkeit der Translation des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ist $\vec{v}_0 = \dfrac{\omega}{2\pi} T\,\vec{e}_3$.
Unter Berücksichtigung der Vorzeichenregel für k ist die resultierende Momentangeschwindigkeit eines an die zu ermittelnde Oberfläche gebundenen und mit dem Punkt $\{x, y, z\}$ momentan übereinstimmenden Punktes

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \frac{\omega}{2\pi} T\,\vec{e}_3 + k\,\omega\left\{ (y-L)\vec{e}_1 \cos\alpha - \left[x\cos\alpha + (z-t)\sin\alpha \right]\vec{e}_2 + (y-L)\vec{e}_3 \sin\alpha \right\}.$$

Da der Wert der Winkelgeschwindigkeit offenbar keine Rolle spielt, darf im letzteren Ausdruck und im weiteren $\omega = 1$ angenommen werden. Ersetzt man jetzt x, y, z durch die entsprechenden rechten Seiten der Gleichungen (2.1), so erhält man die folgenden Ausdrücke für die Komponenten des Richtungsvektors der Momentangeschwindigkeit $\vec{v}$ bezüglich des Koordinatensystems $Oxyz$

$$\begin{cases} k\left[\rho(\zeta)\sin\left(\zeta + \dfrac{2\pi}{T}\xi \right) - L \right]\cos\alpha \\ -k\left[\rho(\zeta)\cos\left(\zeta + \dfrac{2\pi}{T}\xi \right)\cos\alpha + (\xi - t)\sin\alpha \right] \\ k\left[\rho(\zeta)\sin\left(\zeta + \dfrac{2\pi}{T}\xi \right) - L \right]\sin\alpha + \dfrac{T}{2\pi} \end{cases}. \tag{2.8}$$

Der Vektor (2.8) muss den Richtungsvektor einer Tangente an die Schraubenfläche (2.1) im betrachteten Punkt darstellen und somit zu den Vektoren (2.2) und (2.3) komplanar sein. Mit der Abkürzung

$$\Phi = \zeta + \frac{2\pi}{T}\xi$$

erhalten wir die Gleichung

$$\begin{vmatrix} k\left[\rho(\zeta)\sin\Phi - L\right]\cos\alpha & -\dfrac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\sin\Phi & -\sin\left[\Phi - \arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right] \\ -k\left[\rho(\zeta)\cos\Phi\cos\alpha + (\xi - t)\sin\alpha\right] & \dfrac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\cos\Phi & \cos\left[\Phi - \arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right] \\ k\left[\rho(\zeta)\sin\Phi - L\right]\sin\alpha + \dfrac{T}{2\pi} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.9}$$

Die Gleichungen (2.5) und (2.9) bilden bezüglich ζ und ξ ein Gleichungssystem, welches den Parameter t enthält. Ist das Gleichungssystem für alle reellen t lösbar, so gibt es für alle möglichen gegenseitigen Anordnungen der gegebenen Schraubenfläche und der zu ermittelnden zylindrischen Oberfläche potentielle Berührpunkte. Somit ist eine notwendige Bedingung erfüllt, um die gewünschte Verzahnung bei der gewählten Funktion $\rho(\zeta)$ und gewählten Werten T, L, α, k synthetisieren zu können. Andernfalls ist die Verzahnung unter den erwähnten Voraussetzungen nicht möglich.

3. Überprüfung auf Durchdringungsfreiheit

Lässt sich bei einem bestimmten Wert t_0 des Parameters t ein potentieller Berührpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ermitteln, so entspricht diesem eine Mantelline der zu ermittelnden zylindrischen Oberfläche. Im Folgenden soll überprüft werden, ob diese Mantellinie die Schraubenfläche (2.1) nicht schneidet.
τ sei eine dimensionslose Variable, die z.B. als Zeit interpretiert werden kann. Dementsprechend kann der oben angeführte Ausdruck für den Vektor $\vec{v}$ als Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \omega k(y - L)\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -\omega k\left[x\cos\alpha + (z - t_0)\sin\alpha\right] \\ \dfrac{dz}{d\tau} = \omega k(y - L)\sin\alpha + \omega\dfrac{T}{2\pi} \end{cases} \tag{3.1}$$

betrachtet werden. Man darf – wie bereits erwähnt – $\omega = 1$ setzen, woraus für die allgemeine Lösung von (3.1) folgt

$$\begin{cases} x = \left[(C_1\sin k\tau - C_2\cos k\tau) - \dfrac{T}{2\pi}\tau\sin\alpha\right]\cos\alpha - C_3\sin\alpha \\ y = C_1\cos k\tau + C_2\sin k\tau + L - \dfrac{T}{2\pi}\dfrac{\sin\alpha}{k} \\ z = (C_1\sin k\tau - C_2\cos k\tau)\sin\alpha + \dfrac{T}{2\pi}\tau\cos^2\alpha + t_0 + C_3\cos\alpha \end{cases} . \tag{3.2}$$

Substituiert man in (3.2)

$$\begin{cases} C_1 = y_0 - L + \dfrac{T}{2\pi}\dfrac{\sin\alpha}{k} \\ C_2 = t_0\sin\alpha - x_0\cos\alpha - z_0\sin\alpha \\ C_3 = -t_0\cos\alpha - x_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha \end{cases} , \tag{3.3}$$

so ergeben sich bezüglich des Koordinatensystems *Oxyz* parametrische Gleichungen der Laufbahn des an die zu ermittelnde Oberfläche gebundenen Punktes, der bei $\tau = 0$ mit dem im Koordinatensystem *Oxyz* fixierten Punkt P_0 übereinstimmt. Durch jeden Punkt dieser Kurve verläuft genau eine zur O_1z_1-Achse parallele Gerade – eine potentielle Mantellinie der gesuchten zylindrischen Oberfläche. Schneidet keine dieser Geraden die Schraubenfläche (2.1), so stellt der Punkt P_0 einen zulässigen Berührpunkt dar.

Zusätzlich zur Verschiebung des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem *Oxyz* rotiert die zu ermittelnde zylindrische Oberfläche um die O_1z_1-Achse. Somit ändert sich die Position dieser Oberfläche gegenüber dem verschiebbaren Koordinatensystem. Um das zu ermittelnde Profil der zylindrischen Oberfläche wieder aufbauen zu können, müssen die als Berührpunkte akzeptierten Punkte des Profils an eine gewisse gegenseitige Anordnung der beiden Koordinatensysteme (an einen festen Wert t_{base} des Parameters t) reduziert werden. Einer Verschiebung des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem *Oxyz* um $t_{\text{curr}} - t_{\text{base}}$ entspricht eine Umdrehung der zu ermittelnden Oberfläche um die O_1z_1-Achse um den Winkel $k\frac{2\pi}{T}(t_{\text{curr}} - t_{\text{base}})$.

Da die zu ermittelnde Oberfläche zylindrisch ist, sind für den Wiederaufbau ihres Profils nur die Koordinaten $x_1(t), y_1(t)$ der ermittelten Punkte von Bedeutung. Sei für den Wert t_{curr} des Parameters t ein möglicher Berührpunkt mit den Koordinaten $(x_{1\text{curr}}, y_{1\text{curr}}, z_{1\text{curr}})$ im Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ ermittelt worden. Der Abstand dieses Punktes von der O_1z_1-Achse ist unabhängig von der Rotation $\rho_1 = \sqrt{x_{1\text{curr}}^2 + y_{1\text{curr}}^2}$. Die Ebene, die durch die O_1z_1-Achse und den ermittelten Punkt bestimmt wird, bildet mit der $O_1x_1z_1$-Ebene den Winkel $\zeta_{1\text{curr}} = \arctan\frac{y_{1\text{curr}}}{x_{1\text{curr}}}$. Der Winkel, den die durch die O_1z_1-Achse und den betrachteten Punkt nach dessen Reduktion bestimmte Ebene mit der $O_1x_1z_1$-Ebene bildet, ist $\zeta_{1\text{base}} = \zeta_{1\text{curr}} - k\frac{2\pi}{T}(t_{\text{curr}} - t_{\text{base}})$. Kennt man diesen Winkel sowie den Wert ρ_1, so ist der reduzierte Punkt eindeutig bestimmt. Nach der Reduktion einer ausreichend großen Anzahl von zulässigen Punkten kann das zu ermittelnde Profil mit der gewünschten Genauigkeit wieder aufgebaut werden.

4. Ein Beispiel zur Anwendung des Verfahrens

Als Beispiel zur Anwendung des dargestellten Verfahrens wurde die Synthese der Verzahnung zweier Räder, deren Achsen einen Winkel von 15° bilden, gewählt. Die Verzahnung besteht aus einem schrägverzahnten Zahnrad mit der Zähnezahl $zz = 45$ und einem Anstieg von 75° auf dem Teilzylinder, sowie einem geradverzahnten Zahnrad mit der Zähnezahl $zz_1 = 60$. Die Steigung der Zähne des schrägverzahnten Rades berechnet sich zu $T = 45m\pi\tan 75^\circ \approx 527{,}60625m$ mit dem Modul m der Verzahnung. Der Achsabstand der Räder soll $\frac{45+60}{2}m = 52{,}5m$ betragen, die Übersetzung ist $0{,}75$. Das schrägverzahnte Rad besitzt im Stirnschnitt das genormte Ausgangsprofil. Das Profil des geradverzahnten Rades wurde nach der vorgestellten Methode ermittelt.

Ein Grund dafür, zunächst diese Vorgehensweise zu betrachten, ist die (relativ) einfache und konstengünstige Herstellung des angepassten geradverzahnten Zahnrads im Vergleich zu einem schrägverzahnten.

Alle das gegebene Zahnrad betreffenden Größen wurden bei der Lösung der entsprechenden Gleichungen mittels Fourierentwicklungen berechnet, deren Koeffizienten in Dateien gespeichert wurden.

Dem Lösungsplan entsprechend wurden die notwendigen Berechnungen für 11 Werte des Parameters t durchgeführt, die im Intervall $t_0 \le t < t_0 + \frac{T}{zz}$ mit $t_0 = 0$ gleichmäßig verteilt sind. Die Teilung des Intervalls ist daher $\frac{T}{45 \cdot 10} \approx \frac{527{,}60625m}{45 \cdot 10} \approx 1{,}172458m$. Die Menge der Werte des Parameters t aus dem oben erwähnten Intervall entspricht eineindeutig der Menge aller möglichen gegenseitigen Anordnungen der gegebenen und der zu ermittelnden Oberflächen. Als Ergebnis sind die Koordinaten von 56 potentiellen Berührpunkten im Koordinatensystem *Oxyz* ermittelt worden. Diese Punkte wurden gemäß Abschnitt 3 auf Durchdringungsfreiheit überprüft. Dabei wurden 29 dieser Punkte als zulässig akzeptiert. In Abbildung 2 sind verhältnistreu die Zahnlücke des gegebenen Zahnrads, zu der der Punkt №2 gehört, sowie ein Fragment der diesen Punkt erzeugenden Laufbahn des Schnittpunktes dargestellt. Die geringe Interferenz des Profils mit der Laufbahn ist auf unvermeidliche Ungenauigkeiten sowohl bei der Berechnung als auch bei der graphischen Darstellung zurückzuführen.

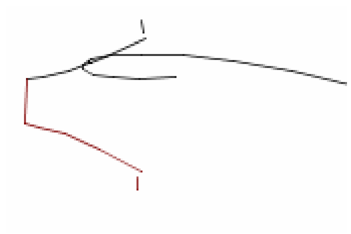

Abbildung 2

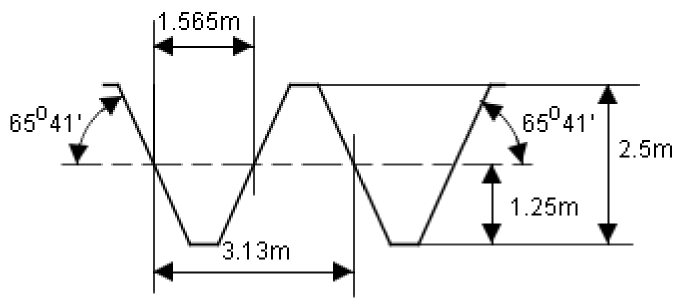

Abbildung 3

Verläuft beim entsprechenden Wert des Parameters t eine Mantelline der zu ermittelnden zylindrischen Oberfläche durch einen der erwähnten 29 Punkte, so durchdringt diese Mantellinie die gegebene Schraubenfläche nicht. Die Schar solcher Mantellinien kann durch Hinzufügen einer weiteren Schar von entsprechend gewählten, zur O_1z_1-Achse parallelen Geraden zur gesuchten zylindrischen Oberfläche ergänzt werden.
Sowohl die Koordinaten der 29 Punkte im Koordinatensystem *Oxyz*, als auch die entsprechenden Werte der Parameter t und l sind in den Tabellen $1 \div 4$ zusammengefasst. Jede einzelne dieser Tabellen enthält die Daten, die zu einer Zahnflanke des gegebenen Zahnrads gehören. Die überprüften Berührpunkte sind für $t = 0$ reduziert worden. Die Ergebnisse der Reduktion sind in den Tabellen $5 \div 8$ zusammengefasst.

Punkt №	t/m	l/m	$\xi/m = z/m$	x/m	y/m
6	0,000000	68,121519	10,935702	-1,200537	22,935207
11	1,172458	68,002425	12,035864	-1,460952	23,030134
16	2,344917	67,880132	13,114082	-1,715441	23,124567
47	3,517375	67,751795	14,256149	-1,986730	23,220138
22	4,689833	67,621287	15,379666	-2,253549	23,315452

Tabelle 1

Punkt №	t/m	l/m	$\xi/m = z/m$	x/m	y/m
5	0,000000	62,722311	11,623984	1,410751	21,985546
10	1,172458	62,639149	12,726116	1,150006	22,080514
15	2,344917	62,552688	13,818417	0,891732	22,174872
46	3,517375	62,461924	14,926046	0,629646	22,270062
21	4,689833	62,367946	16,031354	0,368029	22,365179
28	5,862292	62,270068	17,132038	0,107721	22,460042
34	7,034750	62,168977	18,230541	-0,152141	22,554887
41	8,207208	62,063582	19,345380	-0,416179	22,650294
53	9,379667	61,954889	20,449798	-0,677540	22,745245
59	10,552125	61,842352	21,555824	-0,939275	22,840346

Tabelle 2

Punkt №	t/m	l/m	$\xi/m = z/m$	x/m	y/m
42	3,517375	72,820991	-7,268217	1,719527	23,124856
17	4,689833	72,697489	-6,174444	1,461202	23,030087
23	5,862292	72,577980	-5,061668	1,197482	22,934936
29	7,034750	72,461633	-3,953251	0,935171	22,839845
36	8,207208	72,349596	-2,862846	0,677523	22,745250
48	9,379667	72,240902	-1,758452	0,416170	22,650295
54	10,552125	72,135981	-0,657855	0,155796	22,555415

Tabelle 3

Punkt №	t/m	l/m	$\xi/m = z/m$	x/m	y/m
2	0,000000	78,430334	-11,283198	-0,104279	22,460615
7	1,172458	78,332570	-10,176315	-0,366285	22,365405
12	2,344917	78,238478	-9,077504	-0,626158	22,270722
43	3,517375	78,147714	-7,970084	-0,888205	22,175565
18	4,689833	78,060765	-6,864388	-1,149845	22,080487
25	5,862292	77,977632	-5,761465	-1,410809	21,985561
30	7,034750	77,898285	-4,662415	-1,670802	21,890731

Tabelle 4

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x_1/m	y_1/m	Winkel ζ_1	Radius ρ_1/m
6	1,670739	-29,564793	4,768840	29,611963
11	1,709011	-29,453585	4,770348	29,503125
16	1,745221	-29,345320	4,771791	29,397170
47	1,779644	-29,238390	4,773181	29,292500
22	1,811576	-29,134243	4,774489	29,190510

Tabelle 5

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x_1/m	y_1/m	Winkel ζ_1	Radius ρ_1/m
5	4,371189	-30,514454	4,854671	30,825950
10	4,419449	-30,374872	4,856872	30,694696
15	4,465149	-30,238248	4,858995	30,566145
46	4,508761	-30,103169	4,861061	30,438950
21	4,549919	-29,970579	4,863051	30,313980
28	4,588906	-29,840690	4,864974	30,191469
34	4,625568	-29,713303	4,866823	30,071187
41	4,660249	-29,587857	4,868611	29,952616
53	4,692768	-29,465413	4,870326	29,836767
59	4,723305	-29,345388	4,871976	29,723079

Tabelle 6

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x_1/m	y_1/m	Winkel ζ_1	Radius ρ_1/m
42	-0,207328	-29,396161	4,705336	29,396892
17	-0,165168	-29,502708	4,706791	29,503170
23	-0,121045	-29,611981	4,708301	29,612229
29	-0,074392	-29,723478	4,709886	29,723572
36	-0,025583	-29,836751	4,711532	29,836761
48	0,025691	-29,952603	4,713247	29,952615
54	0,079374	-30,070569	4,715029	30,070674

Tabelle 7

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x_1/m	y_1/m	Winkel ζ_1	Radius ρ_1/m
2	-3,021032	-30,039385	4,612157	30,190914
7	-2,975340	-30,167406	4,614079	30,313776
12	-2,927307	-30,297228	4,616068	30,438317
43	-2,876710	-30,429810	4,618133	30,565483
18	-2,823683	-30,564567	4,620266	30,694722
25	-2,768194	-30,701391	4,622467	30,825935
30	-2,710190	-30,840299	4,624736	30,959154

Tabelle 8

Für jede der Tabellen lässt sich die Menge der enthaltenen Punkte durch einen Kreisevolventenbogen approximieren. Die Radien der Grundkreise dieser Evolventen weichen von der Größe $27{,}34m$ um nicht mehr als $0{,}01m$ ab. Die Punkte weichen maximal um $0{,}00016m$ von den ihnen entsprechenden Kreisevolventen ab. Diese Übereinstimmung bestätigt die Richtigkeit des dargestellten Verfahrens. Der Eingriffswinkel des zylindrischen Zahnrades ergibt sich zu $\arccos\frac{27{,}34}{30} \approx 24^\circ\,18'35''$ und weicht somit erheblich vom Flankenwinkel des genormten Bezugsprofils ab. Der Radius des Wälzkreises beträgt $30m$, der des Teilkreises $29{,}894\,m$. Dies muss beim Profilieren der Wälzwerkzeuge berücksichtigt werden.

In Abbildung 3 ist das Zahnstangenprofil dargestellt, dessen Mittellinie auf dem Teilkreis des ermittelten Zahnrads abrollen muss, um das berechnete Zahnradprofil zu erzeugen. Dabei bezeichnet m den Modul des Stirnschnitts des gegebenen schrägverzahnten Zahnrads. Wie man sieht ist die Teilung der Zahnstange etwas kleiner als die Teilung des Teilkreises des Ausgangsprofils mit πm. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Teilkreisdurchmesser des zylindrischen Zahnrades kleiner als $60m$ ist. Ein wesentlicher Grund, dem Teilkreis gegenüber dem Wälzkreis den Vorzug zu geben ist, dass der Durchmesser des Wälzkreises vom Achsabstand der Zahnräder, der sich ändern darf, abhängt, wie es z.B. für Zahnräder mit Kreisevolventenprofil der Fall ist. Der Wälzkreisdurchmesser ist daher keine kennzeichnende Größe für ein Zahnrad. Der Teilkreisdurchmesser hingegen kann gemessen werden und ist somit kennzeichnend für ein Zahnrad.

Sowohl das zylindrische Zahnrad mit dem der Zahnstange entsprechenden Profil (Abbildung 3), als auch das schrägverzahnte Zahnrad sind angefertigt worden. In der Praxis werden die vorangegangenen Berechnungen durch den guten Eingriff der Räder bestätigt. Abbildung 4 zeigt die Verzahnung der regelmäßig ineinander greifenden Räder aus Stahl mit windschiefen Achsen.

Abbildung 4

5. Der Fall eines Kreisevolventen-Ausgangsprofils

Im Folgenden betrachten wir ein Kreisevolventenprofil, dessen Polarwinkel ζ bzw. Polarradius ρ den parametrischen Gleichungen

$$\begin{cases} \rho(\phi) = r\sqrt{1+\phi^2} \\ \zeta(\phi) = \phi - \operatorname{arctg}\phi + \zeta_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

mit dem Wälzwinkel ϕ als Parameter genügen. Dabei ist r der Radius des Grundkreises und ζ_0 der dem Anfangspunkt der Kreisevolvente entsprechende Polarwinkel.
Aus den Gleichungen (5.1) folgt

$$\frac{d\rho(\phi)}{d\phi} = \frac{r\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}, \quad \frac{d\zeta(\phi)}{d\phi} = \frac{\phi^2}{1+\phi^2}, \quad \frac{d\rho}{d\zeta} = \frac{r\sqrt{1+\phi^2}}{\phi} = \frac{\rho(\phi)}{\phi},$$

$$\frac{\rho(\zeta)\rho'(\zeta)}{\sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2 + \left[\rho'(\zeta)\right]^2}} = \frac{\rho(\phi)\dfrac{\rho(\phi)}{\phi}}{\sqrt{\left[\rho(\phi)\right]^2 + \left[\dfrac{\rho(\phi)}{\phi}\right]^2}} = \frac{\dfrac{\rho(\phi)}{\phi}\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} = r\operatorname{sgn}\phi. \tag{5.2}$$

Somit gilt

$$\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \equiv \frac{1}{\phi}, \quad \frac{2\pi}{T}\frac{\rho(\zeta)\rho'(\zeta)}{\sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2 + \left[\rho'(\zeta)\right]^2}}\cot\alpha \equiv \frac{2\pi}{T} r\cot\alpha\operatorname{sgn}\phi$$

und

$$\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta \equiv \arctan\frac{1}{\phi} - \zeta \equiv \frac{\pi}{2} - \arctan\phi - (\phi - \arctan\phi + \zeta_0) \equiv \frac{\pi}{2} - \phi - \zeta_0 .$$

Ist $\phi > 0$, wird der Grundkreis entgegen dem Uhrzeigersinn abgewickelt und man erhält aus (2.5)

$$\xi = \frac{T}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \phi - \zeta_0 + \arccos\left(\frac{2\pi}{T} r\cot\alpha\right)\right]. \tag{5.3}$$

Hieraus folgt

$$\zeta+\frac{2\pi}{T}\xi=\phi-\arctan\phi+\zeta_0+\frac{\pi}{2}-\phi-\zeta_0+\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\,\mathrm{cotg}\,\alpha\right)=$$
$$=\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)+\mathrm{arccot}\,\phi,$$

$$\rho(\zeta)\cos\left(\zeta+\frac{2\pi}{T}\xi\right)=r\frac{\sqrt{1+\phi^2}}{\sqrt{1+\phi^2}}\times$$
$$\left[\frac{2\pi}{T}r\,\phi\cot\alpha-\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2}\,\mathrm{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right]= \tag{5.4a}$$
$$=r\left[\frac{2\pi}{T}r\,\phi\cot\alpha-\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\mathrm{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right],$$

$$\rho(\zeta)\sin\left(\zeta+\frac{2\pi}{T}\xi\right)=r\frac{\sqrt{1+\phi^2}}{\sqrt{1+\phi^2}}\times$$
$$\left[\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\phi\,\mathrm{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right]= \tag{5.4b}$$
$$=r\left[\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\phi\,\mathrm{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right].$$

Ersetzt man die rechten Seiten der Gleichungen (2.1) durch die entsprechenden Ausdrücke (5.3), (5.4a) und (5.4b), so erhält man die Gleichungen (5.5) im Koordinatensystem *Oxyz* für den geometrischen Ort der potentiellen Berührpunkte der die Verzahnung bildenden Oberflächen:

$$\begin{cases} x(\phi)=r\left[\frac{2\pi}{T}r\,\phi\cot\alpha-\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\mathrm{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right] \\ y(\phi)=r\left[\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\phi\,\mathrm{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right]. \\ z(\phi)=\frac{T}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\phi-\zeta_0+\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right] \end{cases} \tag{5.5}$$

Der Parameter ϕ kommt in diesen Gleichungen nur in der ersten Potenz vor. Da der Ausdruck für z die frei wählbare Größe ζ_0 enthält, ist der geometrische Ort der potentiellen Berührpunkte eine Geradenschar.
Weiterhin gilt

$$\zeta+\frac{2\pi}{T}\xi-\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}=\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)$$

und somit

$$\cos\left[\zeta+\frac{2\pi}{T}\xi-\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right]=\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha$$

und

$$\sin\left[\zeta+\frac{2\pi}{T}\xi-\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right]=\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\operatorname{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right).$$

Mit den Gleichungen (5.1) bis (5.5) kann die im Abschnitt 2 erwähnte, für die Ermittlung von ζ abgeleitete Gleichung durch eine andere ersetzt werden, die den Wälzwinkel ϕ mit dem Parameter t verknüpft, wobei beide Veränderlichen nur explizit auftreten. Ferner merken wir uns, dass diese Gleichung durch $k\omega$ gekürzt werden kann.
Wir ermitteln zunächst den expliziten Ausdruck für den zum ersten Element der dritten Zeile der Determinante (2.9) gehörenden Minor. Es ergibt sich

$$\Delta_{31}=-\frac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\sin\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}\right]=-\frac{2\pi}{T}\rho(\zeta)\sin\left(\arctan\frac{1}{\phi}\right)=-\frac{2\pi}{T}r\frac{\sqrt{1+\phi^2}}{\sqrt{1+\phi^2}}==-\frac{2\pi r}{T}.$$

Das Produkt des ersten Elements der dritten Zeile der Determinante (2.9) und des oben ermittelten Minors ist

$$\left\{L-r\left[\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\phi\,\operatorname{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right]\right\}\frac{2\pi r}{T}\sin\alpha-\frac{r}{k}.$$

Multipliziert man das erste Element der ersten Zeile derselben Determinante mit dem zugehörigen Minor, so erhält man

$$\left\{L-r\left[\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha+\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\phi\operatorname{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right]\right\}\frac{2\pi}{T}r\cos\alpha\cot\alpha,$$

multipliziert man aber das erste Element der zweiten Zeile mit dem zugehörigen Minor, so ist das Produkt

$$\left\{\frac{4\pi^2r^2\cos^2\alpha-T^2\sin^2\alpha}{2\pi T\sin\alpha}\phi+\frac{T}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\zeta_0+\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right]\sin\alpha-t\sin\alpha\right\}\times$$
$$\sqrt{1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\,\operatorname{sgn}\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)-\left[1-\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2\right]r\cos\alpha.$$

Die ϕ und t verknüpfende Gleichung ist

$$\frac{4\pi^2r^2+T^2}{2\pi T}\phi+t+\frac{T}{2\pi}\zeta_0-\frac{T}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)\right]-$$
$$\frac{\dfrac{2\pi r L}{T\sin\alpha}-\dfrac{4\pi^2r^2+T^2}{T^2}r\cos\alpha-\dfrac{r}{k}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)^2}\sin\alpha\operatorname{sgn}\arccos\left(\dfrac{2\pi}{T}r\cot\alpha\right)}=0. \qquad (5.6)$$

Aus dieser Gleichung, die eine implizite lineare Funktion der beiden Veränderlichen ϕ und t darstellt, folgt

$$\phi = -\frac{2\pi T}{4\pi^2 r^2 + T^2} t + \frac{T^2}{4\pi^2 r^2 + T^2}\left[\frac{\pi}{2} - \zeta_0 + \arccos\left(\frac{2\pi}{T} r \cot\alpha\right)\right] + \frac{2\pi T}{4\pi^2 r^2 + T^2} \frac{\dfrac{2\pi r L}{T \sin\alpha} - \dfrac{4\pi^2 r^2 + T^2}{T^2} r \cos\alpha - \dfrac{r}{k}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2\pi}{T} r \cot\alpha\right)^2} \sin\alpha \operatorname{sgn} \arccos\left(\dfrac{2\pi}{T} r \cot\alpha\right)}. \tag{5.7}$$

Ersetzt man in den Ausdrücken (5.5) ϕ durch den rechten Teil der Gleichung (5.7), so entstehen Formeln, die die Koordinaten *x, y, z* eines dem Wert t des Parameters entsprechenden potentiellen Berührpunkts unmittelbar durch t ausdrücken. Verwenden wir jetzt die Gleichungen (1.2), so erhalten wir die Koordinaten x_1, y_1, z_1 desselben Punktes. Die ermittelten Punkte können dann an einen beliebig wählbaren festen Wert des Parameters t reduziert werden.
Somit ist im Fall eines Ausgangsprofils mit Evolventenform das Problem der Ermittlung des Gegenprofils explizit lösbar. Man muss aber beachten, dass es sich bei dem soeben angeführten Verfahren nur um ein paar miteinander konjugierter Zahnflanken handelt und dass bei dessen Verwendung die wichtigen Vorteile der Anwendung von Fourierentwicklungen verlorengehen.

Anmerkung:
Auch im allgemeinen Fall kann man die Ermittlung der Wurzeln der transzendenten Gleichung vermeiden, indem man nicht den Wert des Parameters ζ durch t ausdrückt, sondern t durch ζ, da t nur in der ersten Potenz in der Gleichung auftritt. Mit Computerunterstützung lohnt es sich allerdings kaum, denn das eigentliche Problem besteht in der Ermittlung des Wertes des Winkels ζ für jeden Wert des Parameters t, nicht umgekehrt.

6. Von einer zylindrischen Oberfläche zur konjugierten Schraubenfläche

Im nächsten Schritt soll der zweite Fall des am Anfang formulierten Problems betrachtet werden. Wir gehen jetzt von einer gegebenen zylindrischen Oberfläche aus und wollen eine Schraubenfläche ermitteln, die mit der gegebenen Oberfläche eine regelmäßige Verzahnung bildet. Dabei gelten weiterhin alle im Abschnitt 1 getroffenen Annahmen.
Seien

$$\begin{cases} x_1 = \rho(\zeta)\cos(\zeta + \xi) \\ y_1 = \rho(\zeta)\sin(\zeta + \xi) \end{cases} \tag{6.1}$$

die Gleichungen der Oberflächenschar, die die gegebene Oberfläche in ihrer Bewegung bezüglich des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ bildet, wobei jedem Wert des Winkels ξ eine Oberfläche der Oberflächenschar entspricht. Die beiden Winkel ζ und ξ sollen sin entgegen dem Uhrzeigersinn (von Zielpunkt des Vektors $\overrightarrow{O_1z_1}$ aus betrachtet) gemessen werden. Unter dieser Annahme ist ξ der Winkel der Drehung der zylindrischen Oberfläche um die O_1z_1-Achse und folglich muss immer

$$\xi = -2\pi k \frac{t}{T} \tag{6.2}$$

gelten, denn die Drehung der zylindrischen Oberfläche um die O_1z_1-Achse ist der Verschiebung des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ bezüglich des Koordinatensystems *Oxyz* direkt proportional. Unter Berücksichtigung von (6.2) können die Gleichungen (6.1) als

$$\begin{cases} x_1 = \rho(\zeta)\cos\left(\zeta - \dfrac{2\pi k}{T}t\right) \\ y_1 = \rho(\zeta)\sin\left(\zeta - \dfrac{2\pi k}{T}t\right) \end{cases} \tag{6.3}$$

umgeschrieben werden.
Auch in diesem Fall wollen wir für einen beliebigen, frei wählbaren Wert des Parameters t zunächst einen an die verschiebliche Oberfläche gebundenen Punkt ermitteln, dessen Momentangeschwindigkeit bezüglich des feststehenden Koordinatensystems die an letzteres gebundene Oberfläche bei gewähltem Wert t im Punkt, der mit dem zu ermittelnden zusammenfällt, berührt. Wir wollen die Koordinaten des uns interessierenden Punktes im verschieblichen Koordinatensystem für den betreffenden Wert t ermitteln. Da die Gleichungen der an das unbewegliche Koordinatensystem gebundenen Oberfläche im betrachteten Fall unbekannt sind, gehen wir bei der Bestimmung einer Tangentialebene von der verschiebbaren Oberfläche aus, deren Gleichungen im verschieblichen Koordinatensystem bei jedem Wert t bekannt sind. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass zwei sich in einem beliebigen Punkt berührende Oberflächen eine gemeinsame Tangentialebene in diesem Punkt besitzen.
Des weiteren benötigen wir auch in diesem Fall zwei linear unabhängige Vektoren, die die Tangentialebene an die Oberfläche (6.3) zu einem festen Punkt bei einem festen Wert des Parameters t bestimmen. Dazu bilden wir die Ausdrücke (6.4) für die partiellen Ableitungen nach ζ und z_1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \zeta} = \sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2 + \left[\rho'(\zeta)\right]^2}\sin\left[\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta + \dfrac{2\pi k}{T}t\right] \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial \zeta} = \sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2 + \left[\rho'(\zeta)\right]^2}\cos\left[\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta + \dfrac{2\pi k}{T}t\right] \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial \zeta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial z_1} = 0 \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial z_1} = 0 \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial z_1} = 1 \end{cases} . \tag{6.4}$$

Als linear unabhängige Vektoren können daher die Vektoren (6.5) und (6.6) dienen:

$$\begin{cases} \sin\left[\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta + \dfrac{2\pi k}{T}t\right] \\ \cos\left[\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta + \dfrac{2\pi k}{T}t\right] \\ 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

$$\begin{cases} 0 \\ 0\,. \\ 1 \end{cases} \tag{6.6}$$

Ersetzt man in (2.6) x_1 und y_1 durch die entsprechenden Ausdrücke (6.3), so entsteht ein Ausdruck für die relative Komponente der Momentangeschwindigkeit eines an die Oberfläche (6.3) gebundenen Punktes bezüglich des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$, d.h. für jene Komponente, die durch die Rotation der Oberfläche (6.3) um die O_1z_1-Achse erzeugt wird.
Die durch die Translation des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ bezüglich des Koordinatensystems $Oxyz$ erzeugte Komponente der Momentangeschwindigkeit ist von der Wahl des Punktes der Oberfläche (6.3) unabhängig.

Bezüglich des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ kann diese Komponente als $\left\{ \frac{T}{2\pi}\sin\alpha, 0, \frac{T}{2\pi}\cos\alpha \right\}$ dargestellt werden. Somit ist die Momentangeschwindigkeit eines an die Oberfläche (6.3) gebundenen Punktes

$$\begin{cases} \frac{T}{2\pi}\sin\alpha + k\,y_1 \\ -k\,x_1 \\ \frac{T}{2\pi}\cos\alpha \end{cases} = \begin{cases} \frac{T}{2\pi}\sin\alpha + k\,\rho(\zeta)\sin\left(\zeta - \frac{2\pi k}{T}t\right) \\ -k\,\rho(\zeta)\cos\left(\zeta - \frac{2\pi k}{T}t\right) \\ \frac{T}{2\pi}\cos\alpha \end{cases} . \tag{6.7}$$

Die Bedingung der Komplanarität der Vektoren (6.5), (6.6) und (6.7) kann analytisch als

$$\begin{vmatrix} \frac{T}{2\pi}\sin\alpha + k\,\rho(\zeta)\sin\left(\zeta - \frac{2\pi k}{T}t\right) & \sin\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta + \frac{2\pi k}{T}t\right] & 0 \\ -k\,\rho(\zeta)\cos\left(\zeta - \frac{2\pi k}{T}t\right) & \cos\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta + \frac{2\pi k}{T}t\right] & 0 \\ \frac{T}{2\pi}\cos\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{\rho(\zeta)\rho'(\zeta)}{\sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2 + \left[\rho'(\zeta)\right]^2}} + \frac{T}{2\pi k}\cos\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta + \frac{2\pi k}{T}t\right]\sin\alpha = 0 \tag{6.8}$$

ausgedrückt werden.
Ermittelt man aus (6.8) bei einem beliebigen Wert des Parameters t einen entsprechenden Wert des Winkels ζ, so erhält man eine der Mantellinien der Oberfläche (6.3), die bei diesem Wert t die potentiellen Berührpunkte der gegebenen und der zu ermittelnden Oberfläche enthält. Dass es sich um Mantellinien handelt, folgt daraus, dass alle Punkte einer Mantellinie dieselbe Momentangeschwindigkeit haben, während die Momentangeschwindigkeiten der Punkte verschiedener Mantellinien verschieden sind.
Sei bei einem beliebigen Wert t_0 des Parameters t der Wert ζ_0 des Parameters ζ mit Hilfe von Gleichung (6.8) ermittelt worden. Dann sind im Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ die Gleichungen der betreffenden Mantellinie

$$\begin{cases} x_1 = \rho(\zeta_0)\cos\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T}t_0\right) \\ y_1 = \rho(\zeta_0)\,\sin\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T}t_0\right) \end{cases} . \tag{6.9}$$

Die Gleichungen derselben Mantellinie im Koordinatensystem *Oxyz* sind

$$\begin{cases} x = \rho(\zeta_0)\cos\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T}t_0\right)\cos\alpha - z_1\sin\alpha \\ y = \rho(\zeta_0)\,\sin\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T}t_0\right) + L \\ z = \rho(\zeta_0)\cos\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T}t_0\right)\sin\alpha + z_1\cos\alpha + t_0 \end{cases} . \tag{6.10}$$

Auf dieser Mantellinie soll ein potentieller Berührpunkt ermittelt werden. Es handelt sich dabei um die Ermittlung eines Wertes z_{10} des Parameters z_1, für den der Punkt

$$\left\{ x\left(\zeta_0, z_{10}, t_0 \right), y\left(\zeta_0, t_0 \right), z\left(\zeta_0, z_{10}, t_0 \right) \right\} \tag{6.11}$$

der folgenden Voraussetzung genügt: Der Richtungsvektor der Tangente an die durch den Punkt (6.11) verlaufende Schraubenlinie mit Rechtssteigung, deren Achse *Oz* und deren Steigung T ist, ist in diesem Punkt den Vektoren (6.5) und (6.6) komplanar.
Jetzt sollen die Komponenten des oben erwähnten Vektors ermittelt werden. Die Gleichungen der Schraubenlinie im Koordinatensystem *Oxyz* sind

$$\begin{cases} x = r_0 \cos\left(\gamma + \gamma_0 \right) \\ y = r_0 \sin\left(\gamma + \gamma_0 \right) \\ z = z\left(\zeta_0, z_{10}, t_0 \right) + \dfrac{\gamma}{2\pi} T \end{cases}, \tag{6.12}$$

wobei γ ein veränderlicher Parameter ist und die Gleichungen $r_0 = \sqrt{\left[x\left(\zeta_0, z_{10}, t_0\right)\right]^2 + \left[y\left(\zeta_0, t_0\right)\right]^2}$ und $\gamma_0 = \arctan \dfrac{y\left(\zeta_0, t_0\right)}{x\left(\zeta_0, z_{10}, t_0\right)}$ gelten.

Die Komponenten des Richtungsvektors $\vec{\tau}$ der Tangente bezüglich des Koordinatensystems *Oxyz* sind

$$\begin{cases} \tau_x = \left.\dfrac{dx}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = -r_0 \sin\gamma_0 \\ \tau_y = \left.\dfrac{dy}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = r_0 \cos\gamma_0 \\ \tau_z = \left.\dfrac{dz}{d\gamma}\right|_{\gamma=0} = \dfrac{T}{2\pi} \end{cases}. \tag{6.13}$$

Aus den Gleichungen (1.1) folgt

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \tau_x \vec{e}_1 + \tau_y \vec{e}_2 + \tau_z \vec{e}_3 = \\ &= \left(\vec{e}_1^{\,1} \cos\alpha - \vec{e}_3^{\,1} \sin\alpha \right) \tau_x + \vec{e}_2^{\,1} \tau_y + \left(\vec{e}_1^{\,1} \sin\alpha + \vec{e}_3^{\,1} \cos\alpha \right) \tau_z = \\ &= \left(\tau_x \cos\alpha + \tau_z \sin\alpha \right) \vec{e}_1^{\,1} + \tau_y \vec{e}_2^{\,1} + \left(\tau_z \cos\alpha - \tau_x \sin\alpha \right) \vec{e}_3^{\,1} \end{aligned}$$

mit den Einheitsvektoren gemäß Abschnitt 2.
Zusammen mit den Gleichungen (6.13) ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die Komponenten des Richtungsvektors der Tangente an die Schraubenlinie bezüglich des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$

$$\begin{cases} \tau_{x_1} = \dfrac{T}{2\pi} \sin\alpha - r_0 \sin\gamma_0 \cos\alpha \\ \tau_{y_1} = r_0 \cos\gamma_0 \\ \tau_{z_1} = \dfrac{T}{2\pi} \cos\alpha + r_0 \sin\gamma_0 \sin\alpha \end{cases}. \tag{6.14}$$

Man sieht, dass die Gleichungen

$$r_0 \sin\gamma_0 = y\left(\zeta_0, z_{10}, t_0\right) = \rho(\zeta_0)\ \sin\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T} t_0\right) + L \tag{6.15}$$

und

$$r_0 \cos\gamma_0 = x\left(\zeta_0, z_{10}, t_0\right) = \rho(\zeta_0) \cos\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T} t_0\right) \cos\alpha - z_{10} \sin\alpha \tag{6.16}$$

gelten.
Sind die Vektoren (6.5), (6.6) und (6.14) komplanar, so muss die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{T}{2\pi}\sin\alpha - \left[\rho(\zeta_0)\sin\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T} t_0\right) + L\right]\cos\alpha & \sin\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta_0)}{\rho(\zeta_0)} - \zeta_0 + \frac{2\pi k}{T} t_0\right] & 0 \\ \rho(\zeta_0)\cos\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T} t_0\right)\cos\alpha - z_{10}\sin\alpha & \cos\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta_0)}{\rho(\zeta_0)} - \zeta_0 + \frac{2\pi k}{T} t_0\right] & 0 \\ \frac{T}{2\pi}\cos\alpha - \left[\rho(\zeta_0)\sin\left(\zeta_0 - \frac{2\pi k}{T} t_0\right) + L\right]\sin\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.17}$$

gelten, woraus z_{10} und somit ein potentieller Berührpunkt für den Wert t_0 des Parametes t ermittelt werden kann:

$$z_{10} = \frac{\frac{\rho(\zeta_0)\rho'(\zeta_0)}{\sqrt{\left[\rho(\zeta_0)\right]^2 + \left[\rho'(\zeta_0)\right]^2}}\cos\alpha - \left(\frac{T}{2\pi}\sin\alpha - L\cos\alpha\right)\cos\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta_0)}{\rho(\zeta_0)} - \zeta_0 + \frac{2\pi k}{T} t_0\right]}{\sin\left[\arctan\frac{\rho'(\zeta_0)}{\rho(\zeta_0)} - \zeta_0 + \frac{2\pi k}{T} t_0\right]\sin\alpha}. \tag{6.18}$$

Dem ermittelten Wert z_{10} entspricht eine Schraubenlinie mit Gleichungen (6.12) im Koordinatensystem *Oxyz*. Im Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ sind diese

$$\begin{cases} x_1(\gamma) = r_0\cos(\gamma + \gamma_0)\cos\alpha + \left[z\left(\zeta_0, z_{10}, t_0\right) + \frac{T}{2\pi}\gamma - t\right]\sin\alpha \\ y_1(\gamma) = r_0\sin(\gamma + \gamma_0) - L \\ z_1(\gamma) = -r_0\cos(\gamma + \gamma_0)\sin\alpha + \left[z\left(\zeta_0, z_{10}, t_0\right) + \frac{T}{2\pi}\gamma - t\right]\cos\alpha \end{cases}. \tag{6.19}$$

Dabei ist γ eine unabhängige Veränderliche, r_0 und γ_0 müssen durch die oben angeführten Ausdrücke ersetzt werden, t bezeichnet die frei wählbare Verschiebung des Systems $O_1x_1y_1z_1$ bezüglich des Systems *Oxyz*.

Ermittelt man bei einem beliebigen Wert der Veränderlichen z_1 aus der dritten Gleichung von (6.19) einen entsprechenden Wert des Parameters γ, so lassen sich aus den beiden ersten Gleichungen die Koordinaten $x_1(\gamma)$ und $y_1(\gamma)$ bestimmen. Liegt jetzt bei einem frei wählbaren Wert t der Punkt $P(x_1(\gamma), y_1(\gamma))$ innerhalb der von Linie (6.3) eingeschränkten Fläche, so schneidet die Schraubenlinie (6.19) die gegebene zylindrische Oberfläche und der ermittelte Berührpunkt ist ungültig. Ist dies für keine der in ausreichender Zahl geprüften Kombinationen der Werte t und z_1 der Fall, so erfüllt der ermittelte Berührpunkt die Gültigkeitsbedingungen.

Mit einer ausreichenden Anzahl gültiger Berührpunkte kann ein Stirnschnitt (bzw. ein axialer Schnitt) der gesuchten Schraubenfläche wiederaufgebaut werden. Dazu müssen die ermittelten Punkte auf eine Ebene

$z = \tilde{z} = \text{const}$ (bzw. $y = cx$ bei konstantem c) reduziert werden. Für eine Schraubenlinie (6.12) sind die Koordinaten des reduzierten Punktes

$$\begin{cases} \tilde{x} = r_0 \cos\left\{ \dfrac{2\pi}{T}\left[\tilde{z} - z\left(\zeta_0, z_{10}, t_0 \right) \right] + \gamma_0 \right\} \\ \tilde{y} = r_0 \sin\left\{ \dfrac{2\pi}{T}\left[\tilde{z} - z\left(\zeta_0, z_{10}, t_0 \right) \right] + \gamma_0 \right\} \end{cases}. \tag{6.20}$$

Die Größen r_0 und γ_0 behalten ihre früheren Bedeutungen.

Ersetzt man in (6.8) die Terme $\dfrac{\rho(\zeta)\rho'(\zeta)}{\sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2 + \left[\rho'(\zeta)\right]^2}}$ und $\arctan\dfrac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta$ durch die entsprechenden, im Abschnitt 5 gewonnenen Ausdrücke, so kommt man für den Fall eines Kreisevolventen-Ausgangsprofils zu einer expliziten Lösung des Problems. Allerdings sei darauf hingewiesen, dass dabei die Vorteile der Verwendung von Fourierentwicklungen verloren gehen.

7. Ein weiteres Beispiel zur Anwendung des Verfahrens

Als Beispiel für die Anwendung des im letzten Abschnitt entwickelten Verfahrens wählen wir die Synthese einer Verzahnung, deren Achsabstand und Winkel, den die Achsen der Räder miteinander bilden, denen des Beispiels aus Abschnitt 4 entsprechen. Wir gehen dabei von einem geradverzahnten Zahnrad mit dem in Abschnitt 4 ermittelten Profil aus. Zu ermitteln ist nun das Profil des Stirnschnitts eines schrägverzahnten Rades mit Zähnezahl 45 und Steigung $527{,}60625m$, wobei m der Modul des geradverzahnten Zahnrads ist. Als Ergebnis ist dabei dasselbe Profil zu erwarten, welches im Beispiel des Abschnitts 4 als Ausgangsprofil zur Anwendung kam.
Die Geometrie des im Abschnitt 4 ermittelten und als Ausgangsprofil verwendeten geradverzahnten Zahnrads wurde mittels Fourierentwicklungen errechnet, vgl. [1]. Es wurden der Polarwinkel und der Polarradius als Funktionen der Länge des von der Mittellinie einer Zahnlücke aus gemessenen Bogens des Profils dargestellt. Auch in diesem Fall wurden die Fourierkoeffizienten sowohl dieser beiden Funktionen, als auch zweier Hilfsfunktionen in vier Dateien gespeichert.
Als Ergebnis der entsprechenden Berechnungen sind insgesamt 27 potentielle Berührpunkte ermittelt worden, von denen 25 die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Überprüfungen bestanden haben. Sowohl die Koordinaten dieser 25 Punkte im Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$, als auch die entsprechenden Werte der Parameter t und l sind in den Tabellen $9 \div 12$ zusammengefasst. Jede einzelne dieser Tabellen enthält die Daten der Berührpunkte, die zu einer Zahnflanke des gegebenen Zahnrads gehören. Entsprechend sind die Ergebnisse der Reduktion derselben Punkte in Tabellen $13 \div 16$ zusammengefasst, von denen jede sowohl die kartesischen, als auch die Polarkoordinaten der Punkte jeweils einer Zahnflanke des ermittelten Profils enthält. Die Mengen der Punkte aus den 4 Tabellen wurden durch jeweils einen Kreisevolventenbogen angenähert. Als Ergebnis erhält man den durchschnittlichen Radius des Grundkreises zu $\approx 21{,}146m$, der Radius des Teilkreises ist $\approx 22{,}503m$.

Punkt №	t/m	l/m	x_1/m	y_1/m	z_1/m
1	0,000000	278,014512	2,344734	-29,801822	10,855176
4	1,172458	278,140059	2,074796	-29,706817	10,858405
6	2,344917	278,262559	1,804784	-29,611148	10,858840
8	3,517375	278,381113	1,534478	-29,517172	10,855727
12	4,689833	278,497598	1,264498	-29,421953	10,857620
16	5,862290	278,610527	0,994326	-29,326664	10,856450

Tabelle 9

Punkt №	t/m	l/m	x_1/m	y_1/m	z_1/m
2	0,000000	268,954395	-2,344734	-29,801844	-10,855040
3	1,172458	269,082520	-2,614848	-29,897414	-10,854894
5	2,344917	269,213223	-2,885024	-29,991004	-10,857383
7	3,517375	269,347441	-3,155199	-30,086777	-10,855703
11	4,689833	269,485137	-3,425039	-30,181790	-10,852779
15	5,862290	269,624473	-3,695342	-30,275633	-10,856790
18	7,034748	269,768262	-3,965217	-30,370795	-10,853788
21	8,207208	269,915059	-4,235287	-30,468194	-10,849766

Tabelle 10

Punkt №	t/m	l/m	x_1/m	y_1/m	z_1/m
10	3,517375	283,133223	4,235983	-30,466502	10,859503
14	4,689833	283,280020	3,965936	-30,369800	10,865633
17	5,862292	283,422363	3,695495	-30,275080	10,861476
20	7,034748	283,562598	3,425551	-30,180617	10,860565
23	8,207208	283,698926	3,155763	-30,086486	10,857979
25	9,379667	283,832637	2,884933	-29,991831	10,854140
27	10,552125	283,964277	2,615003	-29,896648	10,858473

Tabelle 11

Punkt №	t/m	l/m	x_1/m	y_1/m	z_1/m
19	7,034748	274,548731	-1,264504	-29,422001	-10,858104
22	8,207208	274,665645	-1,534382	-29,517691	-10,853952
24	9,379667	274,784238	-1,804592	-29,611500	-10,855710
26	10,552125	274,906738	-2,074636	-29,707583	-10,854408

Tabelle 12

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x/m	y/m	Winkel ζ	Radius ρ/m
1	2,449659	22,572176	1,462694	22,704712
4	2,501594	22,669832	1,460892	22,807439
6	2,556579	22,770647	1,458989	22,913717
8	2,614069	22,872237	1,457000	23,021133
12	2,675309	22,977447	1,454886	23,132669
16	2,739590	23,085027	1,452675	23,247018

Tabelle 13

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x/m	y/m	Winkel ζ	Radius ρ/m
2	-2,449656	22,572154	1,678899	22,704690
3	-2,400802	22,476511	1,677207	22,604366
5	-2,355114	22,385462	1,675618	22,509008
7	-2,311982	22,294931	1,674127	22,414487
11	-2,271313	22,207951	1,672717	22,323798
15	- 2,233820	22,124858	1,671420	22,237340
18	-2,198369	22,043394	1,670197	22,152743
21	-2,165523	21,962620	1,669079	22,069123

Tabelle 14

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x/m	y/m	Winkel ζ	Radius ρ / m
10	5,201987	21,448901	1,332861	22,070705
14	5,245666	21,523620	1,331740	22,153628
17	5,291510	21,599125	1,330541	22,237857
20	5,340704	21,676708	1,329228	22,324936
23	5,392376	21,756476	1,327841	22,414772
25	5,447354	21,839059	1,326353	22,508180
27	5,505921	21,924353	1,324752	22,605142

Tabelle 15

Punkt №	Kartesische Koordinaten		Polarkoordinaten	
	x/m	y/m	Winkel ζ	Radius ρ/m
19	0,548562	23,126124	1,547080	23,132629
22	0,594697	23,012912	1,544960	23,020594
24	0,637582	22,904465	1,542967	22,913337
26	0,677965	22,796562	1,541065	22,806642

Tabelle 16

Der Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit den erwarteten zeigt die Richtigkeit des Verfahrens. Die geringen Abweichungen sind sowohl auf die unvermeidlichen Rechenungenauigkeiten, als auch auf die leicht unterschiedlichen Modulen der Ausgangsprofile zurückzuführen: Der Modul des Ausgangsprofils ist im aktuellen Beispiel etwas kleiner als der Modul im Beispiel aus Abschnitt 4.
Vergleicht man die in den Tabellen $9 \div 12$ zusammengefassten Daten, so sieht man, dass für jeden der verwendeten Werte des Parameters t mindestens 2 Berührpunkte existieren, die zu wie einander entgegengesetzten Zahnflanken gehören. Die Profile müssen sich daher in unzulässigen gegenseitigen Anordnungen schneiden. Die synthetisierte Verzahnung wird allen an sie gestellten Anforderungen gerecht.

8. Der Fall eines Kreisevolventen-Ausgangsprofils

Hat die gegebene zylindrische Oberfläche im Stirnschnitt Kreisevolventenform, so gilt für jede Zahnflanke

$$\frac{\rho(\zeta)\rho'(\zeta)}{\sqrt{\left[\rho(\zeta)\right]^2+\left[\rho'(\zeta)\right]^2}} = r \operatorname{sgn} \rho'(\zeta) = \text{const} .$$

Somit folgt aus (6.8)

$$\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\rho)}-\zeta+\frac{2\pi k}{T}t=\arccos\left(-\frac{2\pi k r}{T\sin\alpha}\operatorname{sgn}\rho'(\zeta)\right)=\text{const} \tag{8.1}$$

und aus (6.18) $z_{10}=\text{const}$. Letzteres steht im Einklang mit den in Tabellen $9\div 12$ zusammengefassten Ergebnissen der Berechnungen.
Weiterhin folgt aus (5.1) und (6.3)

$$\begin{cases} x_1=r\sqrt{1+\phi^2}\cos\left(\phi-\arctan\phi+\zeta_0-\dfrac{2\pi}{T}t\right)\\ y_1=r\sqrt{1+\phi^2}\sin\left(\phi-\arctan\phi+\zeta_0-\dfrac{2\pi}{T}t\right)\end{cases}. \tag{8.2}$$

Im Abschnitt 5 wurde für den Bogen einer Kreisevolvente die Identität

$$\arctan\frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)}-\zeta\equiv\frac{\pi}{2}-\phi-\zeta_0$$

angegeben, woraus

$$\frac{\pi}{2}-\phi-\zeta_0+\frac{2\pi k}{T}t\equiv\arccos\left(-\frac{2\pi k r}{T\sin\alpha}\operatorname{sign}\rho'(\zeta)\right)\equiv\text{const}$$

folgt. Somit gilt

$$\begin{aligned}\phi-\arctan\phi+\zeta_0-\frac{2\pi k}{T}t&\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\arctan\phi+\phi+\zeta_0-\frac{2\pi k}{T}t\equiv\\ &\equiv\frac{\pi}{2}-\arctan\phi-\frac{\pi}{2}+\phi+\zeta_0-\frac{2\pi k}{T}t\equiv\beta-\arctan\phi,\end{aligned}$$

wobei β ein konstanter Wert ist. Damit können die Gleichungen (8.2) umgeschrieben werden zu

$$\begin{cases} x_1=r\sqrt{1+\phi^2}\cos(\beta-\arctan\phi)=r(\cos\beta+\phi\sin\beta)\\ y_1=r\sqrt{1+\phi^2}\sin(\beta-\arctan\phi)=r(\sin\beta-\phi\cos\beta)\end{cases}. \tag{8.3}$$

Hieraus folgt, dass die Menge der Punkte $(x_1(\phi),y_1(\phi),z_{10})$ eine an das Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ gebundene Gerade darstellt. Da sich der Parameter ϕ durch t linear ausdrücken lässt, können die Gleichungen dieser Geraden als

$$\begin{cases} x_1=x_1(t)\\ y_1=y_1(t)\\ z_1=z_{10}\end{cases}$$

umgeschrieben werden, wobei $x_1(t)$ und $y_1(t)$ lineare Funktionen des Parameters t sind. Diese Gerade ist der an das verschiebbare Koordinatensystem (nicht an die zylindrische Oberfläche) gebundene geometrische Ort der potentiellen Berührpunkte der gegebenen und der zu ermittelnden Oberflächen.

9. Literaturverzeichnis

[1] Isajs Kans-Kagans, Jürgen Zech: *Beitrag zur geometrischen Synthese von Verzahnungen.* Schriftenreihe der Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg Nr. 46, Nürnberg 2010.
[2] Isajs Kans-Kagans, Michael Haas: *Geometrische Synthese von Verzahnungen mit sich kreuzenden Achsen*. Schriftenreihe der Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg Nr. 51, Nürnberg 2012.
[3] K.-H. Grote, J. Feldhusen: *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*, Springer 2007.
[4] Gino Loria: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Teubner 1911.
[5] Frank Sperling: *Über die analytische Behandlung des allgemeinen Verzahnungsproblems bei beliebiger Lage der Drehachsen*. Dissertation, Berlin, 1959.
[6] Ulrich Häussler: *Generalisierte Berechnung räumlicher Verzahnungen und ihre Anwendung auf Wälzfräserherstellung und Wälzfräsen.* Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
[7] Faydor L. Litvin: *Theory of Gearing*, United States Government Printing, 1989.
[8] David B. Dooner, Ali A. Seireg: *The kinematic geometry of gearing*, Wiley, 1995.
[9] Gerhard Brandner: *Räumliche Verzahnungen*. Dissertation, Karl-Marx-Stadt, 1981.
[10] A. Dyson: *A general theory of the kinematics and geometry of gears in three dimensions,* Clarendon Press, Oxford, 1969.
[11] Wu Da-ren, Luo Jia-shun *A geometric theory of conjugate tooth surfaces*, World Scientific Singapore, 1992.
[12] Karl-Heinz Hirschmann: *Beitrag zur Berechnung der Geometrie von evolventen Verzahnungen.* Dissertation, Stuttgart, 1977.
[13] Ralf Steffens: *Die Profilsteigungsfunktion - ein neuer Weg zur analytischen Bestimmung und Optimierung* allgemeiner *Profilflankenpaarungen*. Dissertation, Stuttgart, 1993.
[14] Jack Phillips *General Spatial Involute Gearing*, Springer, 2003.