

Geometrische Synthese von Verzahnungen mit sich kreuzenden Achsen

Dipl.-Ing. Isajs Kans-Kagans

Riga, Lettland

Prof. Dr.-Ing. Michael Haas

Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg

Abstract

In der umfangreichen Literatur, die der Geometrie der Verzahnungen gewidmet ist, ist kein einziges konkretes Beispiel der geometrischen Synthese von Verzahnungen mit sich kreuzenden Achsen zu finden. Zu dieser Schlussfolgerung kommt man nach dem Studium der Werke [2]-[14]. Dieser Umstand hat sachliche Gründe.

Ein neuer Ansatz zur Lösung des Problems der geometrischen Synthese von Verzahnungen wird dargestellt. Der grundsätzliche Unterschied des vorgeschlagenen Verfahrens von den derzeit bekannten besteht im völligen Verzicht auf die Verwendung von Hüllkurven und Hüllflächen. Grund hierfür ist, dass das oben erwähnte Problem nichts mit der Ermittlung von Hüllkurven oder Hüllflächen zu tun hat.

Das hier dargestellte Verfahren ist universell anwendbar für die geometrische Berechnung von zylindrischen Schraubenrädern mit sich kreuzenden Achsen.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----|-------------------------------------------------------------|----|
| 1. | Einleitung | 4 |
| 2. | Grundbeziehungen | 4 |
| 3. | Ein Beispiel zur Anwendung des allgemeinen Verfahrens | 13 |
| 4. | Der Fall eines Kreisevolventenprofils..... | 22 |
| 5. | Anhang..... | 28 |
| 6. | Literaturverzeichnis..... | 29 |

1. Einleitung

Das vorliegende Werk stellt eine Verallgemeinerung des in [1] geschilderten Verfahrens der geometrischen Synthese von Verzahnungen mit parallelen Achsen auf den Fall von zwei zylindrischen Schraubenrädern mit sich kreuzenden Achsen dar. Diese Verallgemeinerung baut auf der Voraussetzung auf, dass weder Hüllkurven noch Hüllflächen, sondern gewissen Bedingungen genügende Schraubenflächen zu ermitteln sind. Das Problem wird folgenderweise formuliert: Es seien zwei sich kreuzende Geraden gegeben. Weiterhin soll eine Schraubenfläche gegeben sein, deren Achse mit einer der erwähnten Geraden übereinstimmt. Das Problem besteht in der Ermittlung einer Schraubenfläche, deren Achse mit der zweiten dieser Geraden übereinstimmt und die mit der gegebenen Schraubenfläche eine regelmäßige (im Sinne von [1]) Verzahnung bildet und zwar mit einer bestimmten Übersetzung (einschließlich der Richtung der Rotation der gesuchten Schraubenfläche). Dabei soll der Schraubengang der gesuchten Schraubenfläche von vornhinein gegeben sein. Es soll auch bekannt sein, ob die gesuchte Schraubenfläche mit Rechts- oder Linkswindung ausgeführt werden muss.

Dass sowohl Hüllkurven als auch Hüllflächen für die Lösung dieses Problems nicht geeignet sind, ist schon aus folgendem Beispiel ersichtlich. Ein und dieselbe Schnecke (die als ein Zahnrad mit kleiner Zähnezah und kleinem Anstieg betrachtet werden darf) kann sowohl mit einem Schneckenrad als auch mit einem zylindrischen Schraubenrad (mit derselben Zähnezah) eine regelmäßige Verzahnung bilden. Die relativen Bewegungen der Schnecke und des Rades sind in beiden Fällen dieselben. Geht man von der Vermutung aus, dass es sich um die Ermittlung der Hüllfläche um eine von der Oberfläche der Schnecke gebildete Schar handelt, so müssen zwangsläufig die Oberflächen sowohl des Schneckenrades als auch des zylindrischen Schraubenrades dieselbe Hüllfläche darstellen. Diese unterscheiden sich aber wesentlich. Offenbar kann man auf die Verwendung von Hüllkurven bzw. Hüllflächen verzichten und sich des nachstehenden Verfahrens bedienen.

Wenn es sich in der Sachliteratur um zylindrische Schraubenräder handelt, wird der Begriff des Normalschnitts des Zahnrades systematisch angewandt. Bei genauerer Betrachtung sieht man aber leicht, dass dieser Begriff keinen Sinn macht. In der Tat betrifft der Begriff der Teilung die Periodizität des Profils des Zahnrades. Wenn aber dessen Stirnschnitt periodisch ist, ist ein schräger Querschnitt aperiodisch. An und für sich wäre dieser Umstand auch nicht dramatisch (den Stirnschnitt einer eingängigen Schnecke z.B. darf man auch als einen aperiodischen betrachten). Bemerkenswert ist, dass der Winkel, unter dem der Normalschnitt die Achse der Schraubenfläche schneiden soll, eigentlich unbekannt ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Winkel, die Schraubenlinien mit demselben Schraubengang mit den Mantellinien der zugehörigen Drehzylinder bilden, von den Radien dieser Zylinder abhängig und somit nicht konstant sind. Welchem dieser Winkel der Vorzug gegeben werden soll, ist nicht eindeutig. Noch schlimmer ist aber, dass das Schnittgebilde sich ändert, wenn die Ebene des Schnitts um die Achse der Schraubenfläche rotiert. So wird der Begriff des Normalschnitts völlig unbestimmt. Deshalb sollte auf die Verwendung von Normalschnitten verzichtet werden und nur Stirnschnitte verwendet werden. Somit vermeidet man jegliche Unbestimmtheit. Durch einen Stirnschnitt und den Schraubengang ist eine Schraubenfläche völlig definiert, wenn noch bekannt ist, ob sie mit Rechts- oder Linkswindung ausgeführt sein soll. In der folgenden Darlegung wird immer nur von Stirnschnitten der Schraubenflächen ausgegangen. Auch der Axialschnitt kann verwendet werden.

Die entwickelte Lösung besteht in der Ermittlung einer hinreichenden Zahl von Punkten des Stirnschnitts der gesuchten Oberfläche. Kennt man diese, so kann die Oberfläche mit hinreichender Genauigkeit wieder aufgebaut werden.

2. Grundbeziehungen

Der Grundgedanke der hier vorgeschlagenen Lösung des in der Einleitung formulierten Problems ist, wie auch in [1], dass eine beliebige Umdrehung einer Schraubenfläche um ihre Achse einer Verschiebung derselben Schraubenfläche längs derselben Achse äquivalent ist, und zwar der Verschiebung proportional. Wenn man diese Tatsache in Erwägung zieht, vereinfacht sich die Lösung des Problems beträchtlich unter Beibehaltung der logischen Strenge.

Wir beginnen mit der Einführung von kartesischen Rechtssystemen, vgl. Abb. 1. O_0z (also auch Oz) sei die Achse der gegebenen Schraubenfläche, O_1z_1 die Achse der zu ermittelnden Schraubenfläche. Die gegebene Schraubenfläche darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer mit Rechtswindung sein und immer im entgegengesetzten Uhrzeigersinn (wenn vom Zielpunkt des Vektors \vec{Oz} betrachtet) rotieren. Dabei verschiebt sich diese Schraubenfläche in negativer Richtung der Achsen Oz und O_0z („nach unten“). Die Richtung der

Sei nun die gegebene Schraubenfläche durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \rho(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi\right) \\ y = \rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi\right) \\ z = \xi \end{cases} \quad (2.3)$$

mit zwei voneinander unabhängigen Parametern ζ und ξ im Koordinatensystem $Oxyz$ definiert. Dabei bedeuten ζ und ρ den Polarwinkel bzw. den Polarradius eines Punkts des Stirnschnitts der gegebenen Schraubenfläche im Polarkoordinatensystem, dessen Ursprung auf der Achse der Schraubenfläche liegt. ξ entspricht dem Abstand der Ebene des Stirnschnitts von der Ebene $z = 0$. T ist der Schraubengang der gegebenen Schraubenfläche.

Der Winkel ζ soll entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen werden (vom Zielpunkt des Vektors \vec{OZ} aus betrachtet). Da wir uns nur für Schraubenflächen mit Rechtswindung entschieden haben, muss der Schraubengang T immer positiv sein.

Die zu ermittelnde Schraubenfläche sei durch ihre Gleichungen

$$\begin{cases} x_1 = \rho_1(\zeta_1) \cos\left(\zeta_1 + \frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \\ y_1 = \rho_1(\zeta_1) \sin\left(\zeta_1 + \frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \\ z_1 = \xi_1 + t_1 \end{cases} \quad (2.4)$$

mit zwei voneinander unabhängigen Parametern ζ_1 und ξ_1 im Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ definiert. Die Parameter $\zeta_1, \rho_1, \xi_1, T_1$ sind sinngemäß wie die Parameter ζ, ρ, ξ, T definiert.

Der Winkel ζ_1 soll wieder entgegen dem Uhrzeigersinn (vom Zielpunkt des Vektors $\vec{O_1z_1}$ aus betrachtet) gemessen werden. Diese Schraubenfläche darf sowohl mit Rechts- als auch mit Linkssteigung ausgeführt sein. Der Schraubengang T_1 ist dementsprechend positiv bzw. negativ. Der Parameter t_1 bestimmt die Verschiebung der zu ermittelnden Schraubenfläche längs der O_1z_1 Achse.

Wir nehmen jetzt an, dass jeder Umdrehung der gegebenen Schraubenfläche um ihre Achse um einen beliebigen Winkel ϕ eine Umdrehung der zu ermittelnden Schraubenfläche um ihre Achse um einen Winkel $k\phi$ entspricht, wobei k konstant, d.h. von ϕ unabhängig ist. Vom geometrischen Gesichtspunkt aus entspricht eine Umdrehung der Schraubenfläche (2.3) um ihre Achse um den Winkel ϕ genau deren Verschiebung um $\pm \frac{\phi}{2\pi} T$ längs derselben Achse. Eine Umdrehung der Schraubenfläche (2.4) um ihre Achse um den Winkel

$k\phi$ entspricht einer Verschiebung um $\pm \frac{k\phi}{2\pi} T_1$ längs derselben Achse. Somit muss für die Verschiebung t des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem $Oxyz$ und die gleichzeitige Verschiebung t_1 der Schraubenfläche (2.4) längs der O_1z_1 Achse die Gleichung

$$\frac{t_1}{t} = \pm \frac{\frac{k\phi}{2\pi} T_1}{\frac{\phi}{2\pi} T} = \pm k \frac{T_1}{T}$$

gelten. Hieraus folgt

$$t_1 = \pm k \frac{T_1}{T} t. \tag{2.5}$$

Sei jetzt n die größte zulässige natürliche Zahl, für die die Identität

$$\rho(\zeta) \equiv \rho\left(\zeta + \frac{2\pi}{n}\right)$$

gilt, n_1 sei die größte zulässige natürliche Zahl, für die die Identität

$$\rho_1(\zeta_1) \equiv \rho_1\left(\zeta_1 + \frac{2\pi}{n_1}\right)$$

gilt. n und n_1 sind offenbar die Zähnezahlen der Zahnräder, die die zu synthetisierende Verzahnung bilden sollen.

Die Umdrehungen um $\pm \frac{2\pi}{n}$ bzw. um $\pm \frac{2\pi}{n_1}$ sind offenbar dem Betrag nach die kleinsten der Umdrehungen, die die Schraubenfläche (2.3) bzw. (2.4) auf sich selbst abbilden. Deshalb muss jeder Umdrehung der Schraubenfläche (2.3) um $\pm \frac{2\pi}{n}$ eine Umdrehung der Schraubenfläche (2.4) um $\pm \frac{2\pi}{n_1}$ entsprechen und umgekehrt. Dies bedeutet aber, dass

$$\pm k \frac{2\pi}{n} = \pm \frac{2\pi}{n_1}$$

oder

$$|k| = \frac{n}{n_1}$$

gelten muss. Im Unterschied zum Fall der Zahnräder mit gleichlaufenden Achsen [1] muss die Gleichung

$$\left| \frac{T}{T_1} \right| = \frac{n}{n_1}$$

nicht unbedingt gelten.

Folgende Regel für die Bestimmung des Vorzeichens der Übersetzung k soll vereinbart werden:

Nehmen wir an, dass bei positiven Werten der Übersetzung die gesuchte Schraubenfläche im entgegengesetzten Uhrzeigersinn (vom Zielpunkt des Vektors $O_1 z_1$ aus betrachtet) rotiert, bei negativen Werten aber im Uhrzeigersinn. Es ist leicht einzusehen, dass bei dieser Annahme den positiven Werten des Produkts kT_1 Verschiebungen der gesuchten Schraubenfläche in negativer Richtung der $O_1 z_1$ Achse entsprechen, negative Werte desselben Produkts entsprechen Verschiebungen in positiver Richtung. Daraus kommt man zum Schluss, dass für den in Gleichungen (2.4) auftretenden Parameter t_1 das Verhältnis

$$t_1 = -k \frac{T_1}{T} t \tag{2.6}$$

gelten muss.

So befindet sich die zu ermittelnde Schraubenfläche (2.4) relativ zu der unbeweglichen gegebenen Schraubenfläche (2.3) in Parallelverschiebung (Translation) mit der Geschwindigkeit $\vec{\tau}$, deren Komponenten sich als

$$\begin{cases} \tau_x = k \frac{T_1}{T} t \sin \alpha \\ \tau_y = 0 \\ \tau_z = t - k \frac{T_1}{T} t \cos \alpha \end{cases}$$

beziehungsweise nach Division durch t als

$$\begin{cases} \tau_x = k \frac{T_1}{T} \sin \alpha \\ \tau_y = 0 \\ \tau_z = 1 - k \frac{T_1}{T} \cos \alpha \end{cases} \quad (2.7)$$

darstellen lassen. Der Vektor (2.7) ist bis auf den skalaren Faktor t eindeutig bestimmt.

Die unbewegliche Schraubenfläche (2.3) kann offenbar nur in jenen Punkten von der sich in Translation befindenden Schraubenfläche (2.4) berührt werden, in denen der Vektor (2.7) die Schraubenfläche (2.3) berührt. Das bedeutet aber, dass (2.7) der Tangentialebene an die Schraubenfläche (2.3) im betreffenden Punkt parallel sein muss. So muss das Spatprodukt des Vektors (2.7) und irgendwelchen zwei nichtkollinearen, der Tangentialebene parallelen Vektoren Null sein. Als solche können die Vektoren $\left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right\}$ und

$\left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right\}$ gewählt werden, wobei die partiellen Ableitungen im betreffenden Punkt zu berechnen sind.

Aus den Gleichungen (2.3) folgt

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = -\frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \sin \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi \right) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \cos \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi \right) \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

und

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \zeta} = -\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2} \sin \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2} \cos \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Gleichung (2.10) stellt in analytischer Form die Bedingung der Komplanarität der Vektoren (2.7), (2.8) und (2.9) dar.

$$\begin{vmatrix} k \frac{T_1}{T} \sin \alpha & -\frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \sin \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi \right) & -\sin \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \\ 0 & \frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \cos \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi \right) & \cos \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \\ 1 - k \frac{T_1}{T} \cos \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Nach einigen Umformungen erhält man

$$\xi = \frac{T}{2\pi} \left\{ \arccos \left[-\frac{2\pi \rho(\zeta) \rho'(\zeta) (T - k T_1 \cos \alpha)}{k T T_1 \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2} \sin \alpha} \right] + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta \right\}. \quad (2.11)$$

Gilt die Ungleichung

$$\left| \frac{2\pi \rho(\zeta) \rho'(\zeta) (T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2} \sin \alpha} \right| \leq 1, \quad (2.12)$$

so liefert (2.11) jene Werte der Veränderlichen ξ , nach deren Substitution zusammen mit dem betreffenden Wert der Veränderlichen ζ in (2.3) sich Koordinaten im $Oxyz$ der eventuellen Berührungspunkte ergeben. Die Gleichung (2.11), die den Parameter t nicht enthält, definiert auf der unbeweglichen Schraubenfläche (2.3) eine Linie, in deren Punkten diese Schraubenfläche von der sich in Translation befindenden, zu ermittelnden Schraubenfläche berührt werden kann. Auf dieser Linie können für jeden festen Wert des Parameters t diesem Wert entsprechende Berührungspunkte ermittelt werden. Linie (2.11) ist vom Achsabstand der Zahnräder unabhängig.

Wir betrachten für einen festen Wert \tilde{t} des Parameters t die Schar der Schraubenlinien, die die zu ermittelnde Schraubenfläche bilden sollen. Diese Schraubenlinien haben eine gemeinsame Achse $O_1 z_1$, einen gemeinsamen Schraubengang T_1 und sind alle mit Rechts- bzw. Linkswindung.

Wird aus (2.11) für den Wert $\tilde{\zeta}$ des Parameters ζ der Wert $\xi(\tilde{\zeta})$ des Parameters ξ ermittelt, so sind die Koordinaten des entsprechenden Punktes \tilde{P} der Schraubenfläche (2.3) im Koordinatensystem $Oxyz$

$$\begin{cases} \tilde{x} = \rho(\tilde{\zeta}) \cos\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \\ \tilde{y} = \rho(\tilde{\zeta}) \sin\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \\ \tilde{z} = \xi(\tilde{\zeta}) \end{cases} \quad (2.13)$$

Durch diesen Punkt verläuft beim gewählten Wert \tilde{t} des Parameters t genau eine der betrachteten Schraubenlinien. Seien die Gleichungen dieser Linie im Koordinatensystem $O_1 x_1 y_1 z_1$

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \\ y_1 = \tilde{r} \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \\ z_1 = \xi_1 + \tilde{c} \end{cases} \quad (2.14)$$

wobei ξ_1 ein veränderlicher Parameter ist. \tilde{r} ist der Radius des Zylinders, dessen Achse mit der Achse $O_1 z_1$ übereinstimmt und auf dessen Mantelfläche die Linie (2.14) gelegen ist. \tilde{c} ist die momentane Verschiebung derselben Linie gegenüber der Ebene $z_1 = 0$. Die Werte der Konstanten \tilde{r} und \tilde{c} werden in diesem Schritt noch nicht benötigt.

Aus (2.14) ergeben sich die Ausdrücke (2.15) für Ableitungen der Koordinaten x_1, y_1, z_1 nach dem Parameter ξ_1

$$\begin{cases} \tau_{1x_1} = \frac{dx_1}{d\xi_1} = -\frac{2\pi}{T_1} \tilde{r} \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) = -\frac{2\pi}{T_1} y_1 \\ \tau_{1y_1} = \frac{dy_1}{d\xi_1} = \frac{2\pi}{T_1} \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) = \frac{2\pi}{T_1} x_1 \\ \tau_{1z_1} = \frac{dz_1}{d\xi_1} = 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Ersetzt man jetzt im rechten Teil der Gleichungen (2.15) x_1 und y_1 durch die entsprechenden Formeln (2.2), so ergeben sich für den Wert $\tilde{\zeta}$ der Veränderlichen ζ die Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{1x_1} = \frac{dx_1}{d\xi_1} = -\frac{2\pi}{T_1}(\tilde{y} - L) = \\ \quad = -\frac{2\pi}{T_1} \left[\rho(\tilde{\zeta}) \sin \left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta}) \right) - L \right] \\ \tau_{1y_1} = \frac{dy_1}{d\xi_1} = \frac{2\pi}{T_1} \left[\tilde{x} \cos \alpha + (\tilde{z} - \tilde{t}) \sin \alpha \right] = \\ \quad = \frac{2\pi}{T_1} \left[\rho(\tilde{\zeta}) \cos \left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta}) \right) \cos \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \sin \alpha \right] \\ \tau_{1z_1} = \frac{dz_1}{d\xi_1} = 1 \end{array} \right. , \quad (2.16)$$

die die Komponenten des Vektors $\bar{\tau}_1$ der Tangente an die Schraubenlinie (2.14) zum Punkt \tilde{P} im Koordinatensystem $O_1 x_1 y_1 z_1$ ausdrücken. Den Ausdruck für $\xi(\tilde{\zeta})$ erhält man, indem man im rechten Teil des Ausdrucks (2.11) ζ durch $\tilde{\zeta}$ ersetzt.

Die Komponenten des Vektors $\bar{\tau}_1$ im Koordinatensystem $Oxyz$ ergeben sich aus den Abbildungsgleichungen (2.1) (hier in Matrixschreibweise dargestellt) und dem Vektor (2.16):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tau_{1x} \\ \tau_{1y} \\ \tau_{1z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{1x_1} \\ \tau_{1y_1} \\ \tau_{1z_1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{cases} -\frac{2\pi}{T_1} \left[\rho(\tilde{\zeta}) \sin \left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta}) \right) - L \right] \cos \alpha - \sin \alpha \\ \frac{2\pi}{T_1} \left[\rho(\tilde{\zeta}) \cos \left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta}) \right) \cos \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \sin \alpha \right] \\ -\frac{2\pi}{T_1} \left[\rho(\tilde{\zeta}) \sin \left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta}) \right) - L \right] \sin \alpha + \cos \alpha \end{cases} . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Da Parallelverschiebungen den Richtungsvektor der Tangente nicht ändern, entfällt dabei für den Bildvektor der Verschiebungsanteil der Abbildung.

Ist \tilde{P} ein Berührungspunkt der gegebenen und der zu ermittelnden Schraubenflächen, so muss der Vektor $\bar{\tau}_1$ die Schraubenfläche (2.3) in diesem Punkt berühren, d.h. den Vektoren (2.8) und (2.9) komplanar sein.

Die Bedingung dieser Komplanarität lässt sich analytisch als

$$\left| \begin{array}{cc} \tau_{1x} & -\frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \sin \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\zeta) \right) & -\sin \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\zeta) - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \\ \tau_{1y} & \frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \cos \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\zeta) \right) & \cos \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\zeta) - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] \\ \tau_{1z} & 1 & 0 \end{array} \right| = 0 \quad (2.18)$$

darstellen. Es soll dabei die erste Spalte der Determinante durch den rechten Teil der Gleichungen (2.17) mit ζ statt $\tilde{\zeta}$ ersetzt werden und dann statt des Terms $\xi(\zeta)$, wo immer dieser auftritt, der rechte Teil des Ausdrucks (2.11) substituiert werden. Es entsteht somit eine Gleichung bezüglich der einzigen Unbekannten ζ . Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Drehungen der Koordinaten durch ihre Verschiebungen ersetzt wurden, und damit eine der Unbekannten aus dem Gleichungssystem eliminiert werden konnte. Dies erleichtert die Lösung des Problems wesentlich. Die entstehende Gleichung kann näherungsweise gelöst werden. Wenn ein Wert des Parameters ζ bekannt ist, errechnet man aus (2.11) die entsprechenden Werte des Parameters ξ . Kennt man die Werte dieser beiden Parameter, so liefern die Gleichungen (2.3) die Koordinaten der eventuellen Berührungspunkte im Koordinatensystem $Oxyz$. Wendet man auf diese die Formeln (2.2) an, so erhält man die Koordinaten derselben Punkte im Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$, und zwar für den Wert \tilde{t} des Parameters t . Diese Punkte sollen nicht als ans Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$, sondern als an die zu ermittelnde Schraubenfläche gebunden betrachtet werden. So folgen sie dieser Schraubenfläche bei ihrem Gleiten längs der O_1z_1 Achse. Um die zu ermittelnde Schraubenfläche wieder aufbauen zu können, braucht man die auf einen frei wählbaren festen Wert des Parameters t bezogenen Koordinaten ihrer Punkte. Die ermittelten Punkte sollen auf diesen Wert des Parameters t reduziert werden. Allerdings ist zu prüfen, ob die irgendeinem Punkt entsprechende Schraubenlinie (gegebenenfalls die Linie (2.14)) sich mit der zu ermittelnden Schraubenfläche bewegend die Schraubenfläche (2.3) nicht schneidet. Am Beispiel dieser Linie wird gezeigt, wie die Überprüfung analytisch durchgeführt werden kann.

Wir beginnen mit der Ermittlung der Gleichungen der Linie im Koordinatensystem $Oxyz$. Für den mit dem Punkt \tilde{P} momentan übereinstimmenden Punkt der Schraubenlinie (2.14) müssen (unter Berücksichtigung der Formeln (2.2) und (2.13)) die Gleichungen

$$\begin{cases} \rho(\tilde{\zeta}) \cos\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \cos \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \sin \alpha = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \tilde{\xi}_1\right) \\ \rho(\tilde{\zeta}) \sin\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) - L = \tilde{r} \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \tilde{\xi}_1\right) \\ -\rho(\tilde{\zeta}) \cos\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \sin \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \cos \alpha = \tilde{\xi}_1 + \tilde{c} \end{cases} \quad (2.19)$$

gelten. Hieraus folgt

$$\tilde{r} = \sqrt{\left[\rho(\tilde{\zeta}) \cos\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \cos \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \sin \alpha \right]^2 + \left[\rho(\tilde{\zeta}) \sin\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) - L \right]^2} \quad (2.20)$$

und für den dem Wert $\tilde{\zeta}$ der Veränderlichen ζ entsprechenden Wert der Veränderlichen ξ_1

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{T_1}{2\pi} \arctan \frac{\rho(\tilde{\zeta}) \sin\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) - L}{\rho(\tilde{\zeta}) \cos\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \cos \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \sin \alpha}. \quad (2.21)$$

Zu ermitteln ist noch die Konstante \tilde{c} :

$$\tilde{c} = \tilde{z}_1 - \tilde{\xi}_1 = -\rho(\tilde{\zeta}) \cos\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \sin \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \cos \alpha - \frac{T_1}{2\pi} \arctan \frac{\rho(\tilde{\zeta}) \sin\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) - L}{\rho(\tilde{\zeta}) \cos\left(\tilde{\zeta} + \frac{2\pi}{T} \xi(\tilde{\zeta})\right) \cos \alpha + (\xi(\tilde{\zeta}) - \tilde{t}) \sin \alpha}. \quad (2.22)$$

Kennt man \tilde{r} und \tilde{c} , so können die Gleichungen der Linie (2.14) im Koordinatensystem $Oxyz$ ermittelt werden, indem man die Formeln (2.1) auf (2.14) anwendet:

$$\begin{cases} x_i(\xi_1) = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \cos \alpha - (\xi_1 + \tilde{c}) \sin \alpha \\ y_i(\xi_1) = \tilde{r} \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) + L \\ z_i(\xi_1) = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \sin \alpha + (\xi_1 + \tilde{c}) \cos \alpha + \tilde{t} \end{cases} \quad (2.23)$$

Gleichungen (2.23) definieren die Schraubenlinie (2.14) im Koordinatensystem $Oxyz$ bei der Verschiebung \tilde{t} des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem letzteren.

Um zu Gleichungen zu gelangen, die die Schraubenlinie (2.14) bei jeder beliebigen Verschiebung t des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem $Oxyz$ in letzterem definieren, erinnern wir uns daran, dass einem Zuwachs $t - \tilde{t}$ des Parameters t die von den Ausdrücken (2.7) bestimmten Zuwächse der Koordinaten eines beliebigen Punkts der zu ermittelnden Schraubenfläche entsprechen. Es sollen somit bei einer beliebigen Verschiebung t des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem $Oxyz$ für die Schraubenlinie (2.14) im Koordinatensystem $Oxyz$ die Gleichungen (2.24) gelten. Dabei werden \tilde{r} und \tilde{c} durch die Ausdrücke (2.20) bzw. (2.22) ersetzt.

Mit den Gleichungen (2.24), lassen sich bei beliebiger Verschiebung t des Koordinatensystems $O_1x_1y_1z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem $Oxyz$ die Koordinaten eines beliebigen Punkts der Schraubenlinie (2.14) im Koordinatensystem $Oxyz$ errechnen.

Fixieren wir einen beliebigen Wert t_0 für die Verschiebung t und einen Wert z_0 für die Koordinate z , so lassen sich aus der Dritten der Gleichungen (2.24) die entsprechenden Werte der Veränderlichen ξ_1 ermitteln¹. Kennt man diese, so ermittelt man aus denselben Gleichungen die Abszissen und Ordinaten der Schnittpunkte der Ebene $z = z_0$ und der Schraubenlinie (2.14) beim festen Wert t_0 der Verschiebung:

$$\begin{cases} x_i(\xi_1) = x_i(\xi_1) - k \frac{T_1}{T} (t - \tilde{t}) \sin \alpha = \\ \quad = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \cos \alpha - (\xi_1 + \tilde{c}) \sin \alpha - k \frac{T_1}{T} (t - \tilde{t}) \sin \alpha \\ y_i(\xi_1) = y_i(\xi_1) = \tilde{r} \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) + L \\ z_i(\xi_1) = z_i(\xi_1) + \left(1 - k \frac{T_1}{T} \cos \alpha\right) (t - \tilde{t}) = \\ \quad = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \sin \alpha + (\xi_1 + \tilde{c}) \cos \alpha + \tilde{t} + \left(1 - k \frac{T_1}{T} \cos \alpha\right) (t - \tilde{t}) = \\ \quad = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \sin \alpha + (\xi_1 + \tilde{c}) \cos \alpha + \left(1 - k \frac{T_1}{T} \cos \alpha\right) t + k \frac{T_1}{T} \tilde{t} \cos \alpha \end{cases} \quad (2.24)$$

Ersetzt man in den ersten beiden Gleichungen von (2.3) ξ durch z_0 , so ergeben sich die Gleichungen des Schnittgebildes derselben Ebene und der gegebenen Schraubenfläche. Für jeden der ermittelten Schnittpunkte

¹ Näherungsweise, jedoch mit hinreichender Genauigkeit.

kann, wie es in [1] ausführlich beschrieben wurde, überprüft werden, ob dieser Punkt inner- oder außerhalb des betreffenden Schnittgebildes liegt und ob die betreffende Schraubenlinie dementsprechend ausgesondert werden soll oder (nach einer hinreichenden Anzahl Prüfungen (Tests) ohne negative Ergebnisse) akzeptiert werden kann. Um der Tauglichkeit der der Prüfung unterworfenen Schraubenlinie sicher zu sein, müssen Tests bei mehreren Werten von z_0 für mehrere Werte der Verschiebung t durchgeführt werden. Das ist zwar aufwändig, jedoch notwendig.

Wir wollen jetzt für alle tauglichen Schraubenlinien die Koordinaten x_1 und y_1 ihrer Schnittpunkte mit beliebiger Ebene $z = z_{10} = \text{const}$ bei beliebigem $t = t_0 = \text{const}$ ermitteln. Sowohl die Koordinate z_{10} als auch der Wert t_0 des Parameters t müssen jedoch für alle betrachteten Schraubenlinien dieselben bleiben. Wie solch eine Reduktion ausgeführt werden kann, zeigen wir am Beispiel der Linie (2.14). Gelten nämlich für \tilde{t} die Gleichungen (2.14), so gelten für t_0 , wie es aus (2.6) folgt, die Gleichungen

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{r} \cos\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \\ y_1 = \tilde{r} \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \xi_1\right) \\ z_1 = \xi_1 + \tilde{c} - k \frac{T_1}{T} (t_0 - \tilde{t}) \end{cases} \quad (2.25)$$

Kennt man die Konstanten \tilde{r} und \tilde{c} , so kann aus der Dritten der Gleichungen (2.25) der der Koordinate z_{10} entsprechende Wert der Variablen ξ_1 ermittelt werden. Somit können die entsprechenden Werte x_{10} und y_{10} der Abszisse und der Ordinate des reduzierten Punkts errechnet werden. Verfügt man über eine ausreichend große Anzahl² von reduzierten Punkten, so kann der Stirnschnitt der zu ermittelnden Schraubenfläche mit hinreichender Genauigkeit wieder aufgebaut werden.

Es bleibt zu klären, ob das Problem der geometrischen Synthese von Verzahnungen mit parallelen Achsen ein Sonderfall des vorgestellten Problems ist. Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir nochmals die Formel (2.11).

Verlaufen die Achsen der Zahnräder parallel zueinander, so gilt $\sin \alpha = 0$. Division durch Null ist nicht erlaubt.

Wie in [1] gezeigt, muss gleichzeitig $|k| = \left| \frac{T}{T_1} \right|$ gelten. Im Fall $k = -\frac{T}{T_1}$ ist

$$T - kT_1 \cos \alpha = T + T \cos \alpha = T(1 + \cos \alpha) \quad \text{und} \quad \frac{T - kT_1 \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{T(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty. \quad \arccos x \text{ ist für}$$

$x \rightarrow \infty$ nicht definiert. Ist $k = \frac{T}{T_1}$ so gilt $T - kT_1 \cos \alpha = T - T \cos \alpha = T(1 - \cos \alpha)$ und

$$\frac{T - kT_1 \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{T(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = T \tan \frac{\alpha}{2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0. \quad \arccos 0 = \pm \frac{\pi}{2} \pm 2\pi N \text{ wobei } N \text{ eine beliebige ganze}$$

Zahl ist. Die in [1] gewonnenen Ausdrücke können jedoch auch andere Werte annehmen. Daraus folgt der Schluss, dass der Fall der parallelen Achsen gesondert betrachtet werden muss.

3. Ein Beispiel zur Anwendung des allgemeinen Verfahrens

Die Anwendung des entwickelten allgemeinen Verfahrens zeigen wir am Beispiel der Synthese einer Außenverzahnung von Schraubenrädern mit zueinander senkrechten Achsen. Eines dieser Zahnräder soll, wie im Beispiel aus [1], 45 Zähne haben, deren Stirnschnitt dem Bezugsprofil entsprechende Kreisevolventen darstellt. Die Zähne dieses Rades sollen eine Schraubenfläche mit Rechtswindung bilden, deren Anstieg auf dem Teilzylinder 45° ist. Diesem Anstieg entspricht ein Schraubengang von

² Die Anzahl ist sinnvoll zu wählen.

$$T = 45m\pi \tan 45^\circ \approx 141,3716694m.$$

Darin bezeichnet m den im Stirnschnitt des Teilzylinders gemessenen und vom gewählten Schraubengang der Zähne unabhängigen Modul.

Das zweite Zahnrad, dessen Profil im Stirnschnitt zu ermitteln ist, soll dieselbe Zähnezahzahl und denselben Schraubengang haben und, wie das erste, mit Rechtswindung sein. Der Achsabstand soll $45m$ sein.

Aus der Abbildung 1 ist leicht ersichtlich, dass einer Verschiebung der $O_1 z_1$ Achse in positiver Richtung der Oz Achse („nach oben“) eine Verschiebung der zu ermittelnden Schraubenfläche längs $O_1 z_1$ Achse in positiver Richtung dieser Achse entspricht. Dabei rotiert eine Schraubenfläche mit Rechtswindung (vom Zielpunkt des Vektors $\overrightarrow{O_1 z_1}$ aus betrachtet) im Uhrzeigersinn. Da die beiden Räder dieselbe Zähnezahzahl haben, muss die Übersetzung $k = -1$ sein.

Sowohl alle das gegebene Zahnrad betreffenden geometrischen Größen als auch alle in (2.11) auftretenden Terme können, wie in [1] gezeigt, errechnet werden, wenn ebenda aufgezählte Fourierkoeffizienten vorhanden sind. Diese wurden in 4 ebenda erwähnten Dateien gespeichert.

Dem vorgestellten Lösungsplan entsprechend wurden für eine Reihe von Werten des Parameters t die in Frage kommenden Berührungspunkte ermittelt. Die Werte von t werden aus einem beliebigen Intervall

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{T}{n} \quad (3.1)$$

gewählt, wobei T und n den Schraubengang bzw. die Zähnezahzahl des gegebenen Zahnrades bezeichnen. Der Menge der Werte t aus (3.1) entspricht genau die Menge aller möglichen gegenseitigen Anordnungen der Mantelflächen des gegebenen und des zu profilierenden Zahnrades. Im betrachteten Falle gilt

$$\frac{T}{n} = m\pi.$$

Für die Berechnungen wurden 20 im Intervall $0 \leq t < \pi m$ gleichförmig verteilte Werte des Parameters t ausgewählt.

Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Tabellen 1 ÷ 6 zusammengefasst, von denen jede neben dem obenerwähnten Satz der Werte des Parameters t die entsprechenden Werte der Bogenlänge l und der Veränderlichen ξ sowie die Koordinaten x und y für die ermittelten Berührungspunkte enthält. Jede einzelne Tabelle enthält die zu einer Flanke eines Zahnes des gegebenen Zahnrades gehörenden Berührungspunkte betreffenden Daten. Daraus wird ersichtlich, dass bei jeder möglichen gegenseitigen Anordnung der Zahnräder der Kontakt im Unterschied von Verzahnungen mit parallelen Achsen nicht entlang einer Linie, sondern nur in einzelnen Punkten stattfinden kann. Im betrachteten Falle berühren sich gleichzeitig mindestens 3 Zähne. Dies kann aus den ermittelten Werten des Parameters l leicht festgestellt werden.

Nachdem diese potentiellen Berührungspunkte ermittelt worden sind, muss sichergestellt werden, dass sich die beiden Räder nicht durchdringen. Dies konnte mittels des oben angeführten Verfahrens überprüft werden. Alle in den Tabellen 1 ÷ 6 angeführten Punkte wurden einer entsprechenden Überprüfung unterzogen und für gültig befunden.

Abbildung 2 zeigt verhältnistreu Fragmente sowohl des Schnittbildes der gegebenen Schraubenfläche und der den Punkt 60 enthaltenden, zur Oz Achse senkrechten Ebene, als auch der Laufbahn des Schnittpunkts dieser Ebene und durch den Punkt 60 verlaufenden, zur gesuchten Schraubenfläche gehörenden Schraubenlinie. Die beiden Kurven unterscheiden sich deutlich voneinander. Der kleine Strich am untersten Rand der Abbildung stellt ein Zehntel des Moduls der Zähne dar. Die Abbildung 3 zeigt dasselbe für den Punkt 122.

Jedem der 120 ermittelten Punkte entspricht eine der zu ermittelnden Schraubenfläche gehörende Schraubenlinie. Alle diese Schraubenlinien sind, wie beschrieben, auf entsprechende Punkte einer fixierten, der Achse $O_1 z_1$ senkrechten Ebene bei festem Wert des Parameters t reduziert worden. Die Ergebnisse dieser Reduktion sind in Tabellen 7 ÷ 12 zusammengefasst. Die Nummern der Punkte in diesen Tabellen stimmen mit denen in Tabellen 1 ÷ 6 überein. Der Polarwinkel ζ_1 ist im Bogenmaß angegeben.

Mittels des in [1] angeführten Verfahrens kann man sich davon überzeugen, dass die Punkte, deren Koordinaten in den Tabellen 1 ÷ 6 zusammengefasst sind, jeweils nahe an einer Geraden liegen. Es wurde für jede dieser Tabellen die durch den ersten und den letzten Punkte verlaufende Gerade ermittelt. Die größte der errechneten Abweichungen beträgt $0,0028m$, wobei m den Modul der Verzahnung bezeichnet.

| Punkt № | t/m | l/m | $\xi/m = z/m$ | x/m | y/m |
|---------|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|
| 1 | 0,0000000000 | 66,3100297852 | 1,4725396199 | 1,4734057392 | 23,0362501142 |
| 2 | 0,1570796327 | 66,2755249023 | 1,5557441730 | 1,4000798004 | 23,0092726588 |
| 3 | 0,3141592654 | 66,2405883789 | 1,6379207512 | 1,3280472223 | 22,9815178433 |
| 4 | 0,4712388980 | 66,2072631836 | 1,7214245323 | 1,2541851928 | 22,9547159414 |
| 5 | 0,6283185307 | 66,1740112305 | 1,8046652565 | 1,1806825471 | 22,9279875610 |
| 6 | 0,7853981634 | 66,1412475586 | 1,8894655375 | 1,1055352010 | 22,9017460843 |
| 7 | 0,9424777961 | 66,1086547852 | 1,9721619696 | 1,0325460471 | 22,8747674691 |
| 8 | 1,0995574290 | 66,0760375977 | 2,0556860886 | 0,9588500191 | 22,8481477066 |
| 9 | 1,2566370610 | 66,0435668945 | 2,1384239318 | 0,8859772203 | 22,8208018082 |
| 10 | 1,4137166940 | 66,0116088867 | 2,2219615191 | 0,8122282395 | 22,7939827095 |
| 11 | 1,5707963270 | 65,9806030273 | 2,3067408892 | 0,7370017316 | 22,7679904016 |
| 12 | 1,7278759590 | 65,9493530273 | 2,3899746515 | 0,6635079838 | 22,7409583434 |
| 13 | 1,8849555920 | 65,9181274414 | 2,4723093506 | 0,5910161508 | 22,7137324094 |
| 14 | 2,0420352250 | 65,8874145508 | 2,5558789589 | 0,5172061797 | 22,6869445160 |
| 15 | 2,1991148580 | 65,8567993164 | 2,6389930886 | 0,4439220885 | 22,6600111815 |
| 16 | 2,3561944900 | 65,8270385742 | 2,7237334822 | 0,3688110424 | 22,6338145974 |
| 17 | 2,5132741230 | 65,7967407227 | 2,8057621222 | 0,2967051297 | 22,6064758251 |
| 18 | 2,6703537560 | 65,7677124023 | 2,8903942697 | 0,2216486207 | 22,5800638208 |
| 19 | 2,8274333880 | 65,7383178711 | 2,9737583955 | 0,1480925283 | 22,5531930451 |
| 20 | 2,9845130210 | 65,7093872070 | 3,0574415641 | 0,0741575339 | 22,5265858212 |

Tabelle 1

| Punkt № | t/m | l/m | $\xi/m = z/m$ | x/m | y/m |
|---------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 21 | 0,0000000000 | 72,0761948242 | -0,0009930579 | 0,000748789 | 22,4995893957 |
| 22 | 0,1570796327 | 72,0475659180 | 0,0812461081 | -0,0716477056 | 22,4724412023 |
| 23 | 0,3141592654 | 72,0194291992 | 0,1647498418 | -0,1453774641 | 22,4455996818 |
| 24 | 0,4712388980 | 71,9918051758 | 0,2489691120 | -0,2198977476 | 22,4191451417 |
| 25 | 0,6283185307 | 71,9642221680 | 0,3329177650 | -0,2940628198 | 22,3924653719 |
| 26 | 0,7853981634 | 71,9368442383 | 0,4156985024 | -0,3670329195 | 22,3654277828 |
| 27 | 0,9424777961 | 71,9099790039 | 0,4989768517 | -0,4405754661 | 22,3386723280 |
| 28 | 1,0995574290 | 71,8835239258 | 0,5831061003 | -0,5150018156 | 22,3119631266 |
| 29 | 1,2566370610 | 71,8569868164 | 0,6650648162 | -0,5871447001 | 22,2848010059 |
| 30 | 1,4137166940 | 71,8307163086 | 0,7491268736 | -0,6613794532 | 22,2581471665 |
| 31 | 1,5707963270 | 71,8051020508 | 0,8325950610 | -0,7351387498 | 22,2314098073 |
| 32 | 1,7278759590 | 71,7795288086 | 0,9161485291 | -0,8088997109 | 22,2045308588 |
| 33 | 1,8849555920 | 71,7544682617 | 1,0002990766 | -0,8833277374 | 22,1779061462 |
| 34 | 2,0420352250 | 71,7296127930 | 1,0829498051 | -0,9562367995 | 22,1509822717 |
| 35 | 2,1991148580 | 71,7052290039 | 1,1667834501 | -1,0303708846 | 22,1241661298 |
| 36 | 2,3561944900 | 71,6805581055 | 1,2489292277 | -1,1026635158 | 22,0972109545 |
| 37 | 2,5132741230 | 71,6566870117 | 1,3333499293 | -1,1773596950 | 22,0705121433 |
| 38 | 2,6703537560 | 71,6328979492 | 1,4177089352 | -1,2519349871 | 22,0438469056 |
| 39 | 2,8274333880 | 71,6093959961 | 1,4998781939 | -1,3243426322 | 22,0169171606 |
| 40 | 2,9845130210 | 71,5863452148 | 1,5833887761 | -1,3981211558 | 21,9901106471 |

Tabelle 2

| Punkt № | t/m | l/m | $\xi/m = z/m$ | x/m | y/m |
|---------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 41 | 0,0000000000 | 77,9588032227 | -1,4748964792 | -1,4716329777 | 21,9632848116 |
| 42 | 0,1570796327 | 77,9362651367 | -1,3901358012 | -1,5466237320 | 21,9365790965 |
| 43 | 0,3141592654 | 77,9140141602 | -1,3079873495 | -1,6190380876 | 21,9096518962 |
| 44 | 0,4712388980 | 77,8918657227 | -1,2249975688 | -1,6922318636 | 21,8828046549 |
| 45 | 0,6283185307 | 77,8701479492 | -1,1413195319 | -1,7661447000 | 21,8560513269 |
| 46 | 0,7853981634 | 77,8487993164 | -1,0577708844 | -1,8399423804 | 21,8291855224 |
| 47 | 0,9424777961 | 77,8276352539 | -0,9736974328 | -1,9142371934 | 21,8024701054 |
| 48 | 1,0995574290 | 77,8070249023 | -0,8896904308 | -1,9885255709 | 21,7756546105 |
| 49 | 1,2566370610 | 77,7861679688 | -0,8078510778 | -2,0605591564 | 21,7488116139 |
| 50 | 1,4137166940 | 77,7661289063 | -0,7225952303 | -2,1360641106 | 21,7220288013 |
| 51 | 1,5707963270 | 77,7460664063 | -0,6410088403 | -2,2079101787 | 21,6952120559 |
| 52 | 1,7278759590 | 77,7264726563 | -0,555566363 | -2,2835510993 | 21,6683412241 |
| 53 | 1,8849555920 | 77,7072304688 | -0,4724720191 | -2,3569172227 | 21,6414595591 |
| 54 | 2,0420352250 | 77,6880820313 | -0,3888684524 | -2,4307475520 | 21,6147244926 |
| 55 | 2,1991148580 | 77,6692343750 | -0,3084949065 | -2,5014275273 | 21,5878795158 |
| 56 | 2,3561944900 | 77,6508867188 | -0,2228071100 | -2,5773118547 | 21,5609381556 |
| 57 | 2,5132741230 | 77,6325820313 | -0,1401834955 | -2,6501819330 | 21,5341811146 |
| 58 | 2,6703537560 | 77,6146757813 | -0,0569253440 | -2,7236912125 | 21,5074032046 |
| 59 | 2,8274333880 | 77,5968398438 | 0,0257818367 | -2,7966385516 | 21,4807881515 |
| 60 | 2,9845130210 | 77,5794492188 | 0,1114054015 | -2,8724275570 | 21,4539820697 |

Tabelle 3

| Punkt № | t/m | l/m | $\xi/m = z/m$ | x/m | y/m |
|---------|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|
| 81 | 0,0000000000 | 62,9538731934 | 2,2118375048 | 2,2078800679 | 21,6951905475 |
| 82 | 0,1570796327 | 62,9338068848 | 2,2933824240 | 2,1360769323 | 21,7220226963 |
| 83 | 0,3141592654 | 62,9134165527 | 2,3772188821 | 2,0620380983 | 21,7487307008 |
| 84 | 0,4712388980 | 62,8929104980 | 2,4604868406 | 1,9885297539 | 21,7756507377 |
| 85 | 0,6283185307 | 62,8722887207 | 2,5446766026 | 1,9140660004 | 21,8024674210 |
| 86 | 0,7853981634 | 62,8511346191 | 2,6285890500 | 1,8399264446 | 21,8291902529 |
| 87 | 0,9424777961 | 62,8297953613 | 2,7121597566 | 1,7661016207 | 21,8560182338 |
| 88 | 1,0995574290 | 62,8080626465 | 2,7957823258 | 1,6922517439 | 21,8828311179 |
| 89 | 1,2566370620 | 62,7859133301 | 2,8789496396 | 1,6188855423 | 21,9096947790 |
| 90 | 1,4137166940 | 62,7636714355 | 2,9609150364 | 1,5466442998 | 21,9365723153 |
| 91 | 1,5707963270 | 62,7411286621 | 3,0457591609 | 1,4715745770 | 21,9633005929 |
| 92 | 1,7278759600 | 62,7181461426 | 3,1288281270 | 1,3982894500 | 21,9900659428 |
| 93 | 1,8849555920 | 62,6950941895 | 3,2123599569 | 1,3244910173 | 22,0168784101 |
| 94 | 2,0420352250 | 62,6715793457 | 3,2947429543 | 1,2518805090 | 22,0438655941 |
| 95 | 2,1991148580 | 62,6477867676 | 3,3792409728 | 1,1771709574 | 22,0705599878 |
| 96 | 2,3561944900 | 62,6239247559 | 3,4634653563 | 1,1026627411 | 22,0972118931 |
| 97 | 2,5132741230 | 62,5996229980 | 3,5468205708 | 1,0290604111 | 22,1239998657 |
| 98 | 2,6703537560 | 62,5748814941 | 3,6292047159 | 0,9564669341 | 22,1509271634 |
| 99 | 2,8274333890 | 62,5500242676 | 3,7119829247 | 0,8834349032 | 22,1779007516 |
| 100 | 2,9845130210 | 62,5249587402 | 3,7961502687 | 0,8089913934 | 22,2045114586 |

Tabelle 4

| Punkt № | t/m | l/m | $\xi/m = z/m$ | x/m | y/m |
|---------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 101 | 0,0000000000 | 68,8948330566 | 0,7381968721 | 0,7351477663 | 22,2314078876 |
| 102 | 0,1570796327 | 68,8688417480 | 0,8207959803 | 0,6623735957 | 22,2583531878 |
| 103 | 0,3141592654 | 68,8429661621 | 0,9055533354 | 0,5873198057 | 22,2847797582 |
| 104 | 0,4712388980 | 68,8167896973 | 0,9883101668 | 0,5142652056 | 22,3117458924 |
| 105 | 0,6283185307 | 68,7899651855 | 1,0716150834 | 0,4407795024 | 22,3386328042 |
| 106 | 0,7853981634 | 68,7630943848 | 1,1550156706 | 0,3671179536 | 22,3654122657 |
| 107 | 0,9424777961 | 68,7357144043 | 1,2378648526 | 0,2940807330 | 22,3924648881 |
| 108 | 1,0995574290 | 68,7081261230 | 1,3219042983 | 0,2198270970 | 22,4191589291 |
| 109 | 1,2566370620 | 68,6800749512 | 1,4048785497 | 0,1466947683 | 22,4459999166 |
| 110 | 1,4137166940 | 68,6523709473 | 1,4895310923 | 0,0716709710 | 22,4724377610 |
| 111 | 1,5707963270 | 68,6237411621 | 1,5717701438 | -0,0007250753 | 22,4995845818 |
| 112 | 1,7278759600 | 68,5955048340 | 1,6557226792 | -0,0750689814 | 22,5262313656 |
| 113 | 1,8849555920 | 68,5665741699 | 1,7396926912 | -0,1492926254 | 22,5528536288 |
| 114 | 2,0420352250 | 68,5367773438 | 1,8218837298 | -0,2215346325 | 22,5800412291 |
| 115 | 2,1991148580 | 68,5073242188 | 1,9055715711 | -0,2954967892 | 22,6068578739 |
| 116 | 2,3561944900 | 68,4774414063 | 1,9886604778 | -0,3688103940 | 22,6338257867 |
| 117 | 2,5132741230 | 68,4476757813 | 2,0734902587 | -0,4440100408 | 22,6600363987 |
| 118 | 2,6703537560 | 68,4170507813 | 2,1567523017 | -0,5174393839 | 22,6869436259 |
| 119 | 2,8274333880 | 68,3863476563 | 2,2401942983 | -0,5911243973 | 22,7137357808 |
| 120 | 2,9845130210 | 68,3551367188 | 2,3222760154 | -0,6633651001 | 22,7409352410 |

Tabelle 5

| Punkt № | t/m | l/m | $\xi/m = z/m$ | x/m | y/m |
|---------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 121 | 0,0000000000 | 74,7193342285 | -0,7359564189 | -0,7369856694 | 22,7679895433 |
| 122 | 0,1570796327 | 74,6878808105 | -0,6523067306 | -0,8109168239 | 22,7945042983 |
| 123 | 0,3141592654 | 74,6563811035 | -0,5677879513 | -0,8858124923 | 22,8207530308 |
| 124 | 0,4712388980 | 74,6243490723 | -0,4842434987 | -0,9596526121 | 22,8476187290 |
| 125 | 0,6283185307 | 74,5918772949 | -0,4014817855 | -1,0326460036 | 22,8746266262 |
| 126 | 0,7853981634 | 74,5586648926 | -0,3179838836 | -1,1062234564 | 22,9018018792 |
| 127 | 0,9424777961 | 74,5259385254 | -0,2341119327 | -1,1804326178 | 22,9279388827 |
| 128 | 1,0995574290 | 74,4926798340 | -0,1507672056 | -1,2540397115 | 22,9546885912 |
| 129 | 1,2566370610 | 74,4583333496 | -0,0681839481 | -1,3266107524 | 22,9824837490 |
| 130 | 1,4137166940 | 74,4249126465 | 0,0163891211 | -1,4015961878 | 23,0084253171 |
| 131 | 1,5707963270 | 74,3910753418 | 0,0989930841 | -1,4745804325 | 23,0355006479 |
| 132 | 1,7278759590 | 74,3553633301 | 0,1818349123 | -1,5472061033 | 23,0631278410 |
| 133 | 1,8849555920 | 74,3213408691 | 0,2663595489 | -1,6222373990 | 23,0888495646 |
| 134 | 2,0420352250 | 74,2867629395 | 0,3497038687 | -1,6959936686 | 23,1152758797 |
| 135 | 2,1991148580 | 74,2504491699 | 0,4320802609 | -1,7682850843 | 23,1434591915 |
| 136 | 2,3561944900 | 74,2146445801 | 0,5152640993 | -1,8416458578 | 23,1703835400 |
| 137 | 2,5132741230 | 74,1800435059 | 0,5991384032 | -1,9162659982 | 23,1962984955 |
| 138 | 2,6703537560 | 74,1435214355 | 0,6839607527 | -1,9911910876 | 23,2222640500 |
| 139 | 2,8274333880 | 74,1064670410 | 0,7672005256 | -2,0644638604 | 23,2493624992 |
| 140 | 2,9845130210 | 74,0688340332 | 0,8478597837 | -2,1350635881 | 23,2780337030 |

Tabelle 6

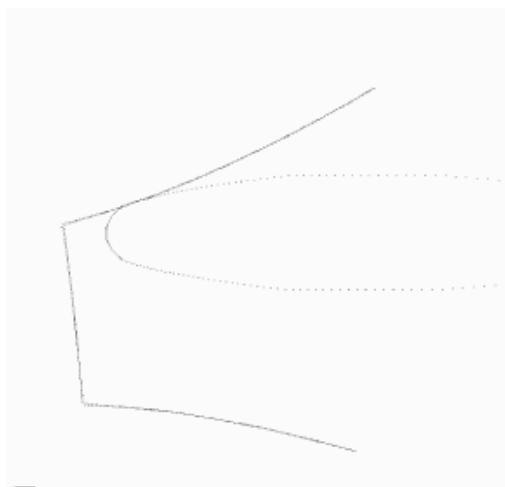


Abbildung 2

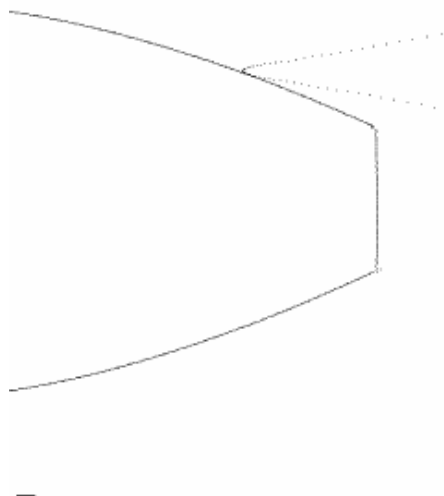


Abbildung 3

Für jede der Tabellen 7 ÷ 12 ist mit Hilfe des im Anhang geschilderten Verfahrens in guter Näherung eine Kreisevolvente ermittelt worden. Es sind der Radius des Grundkreises, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems übereinstimmt, sowie ein dem Anfangspunkt der Evolvente entsprechender Polarwinkel errechnet worden. Dabei wird die Summe der Quadrate der Abweichungen der Punkte von der Evolvente minimiert. Der durchschnittliche Wert des Radius des Grundkreises hat sich als $21,142m$ erwiesen. Dies entspricht nahezu dem in [1] errechneten Wert. Der Radius des Teilzylinders wurde zu $22,501m$ berechnet. Auch dies stimmt mit dem Stirnschnitt des gegebenen Zahnrads sehr gut überein.

Das war aufgrund der Symmetrie (senkrecht aufeinander stehende Achsen, gleiche Zähnezah und gleicher Schraubengang bei beiden Rädern) auch zu erwarten und die Ergebnisse der Berechnung bekräftigen die Richtigkeit des entwickelten Verfahrens.

Es wurde anschaulich gezeigt, wie eine Verzahnung mit sich kreuzenden Achsen geometrisch synthetisiert werden kann. Dies bedeutet aber keineswegs, dass somit auch das Problem der Ermittlung des Profils beliebiger Wälzwerkzeuge für die Fertigung entsprechender Zahnräder gelöst wird. Dies stellt ein weiteres Problem dar.

| Punkt № | Kartesische Koordinaten | | Polarkoordinaten | |
|------------|-------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| | x_1/m | y_1/m | Winkel ζ_1 | Radius ρ_1/m |
| 1 | 1,4725396151 | -21,9637498858 | -1,5038524195 | 22,0130570790 |
| 2 | 1,4805126407 | -21,9853686300 | -1,5035570278 | 22,0351617076 |
| 3 | 1,4889109571 | -22,0079314136 | -1,5032458799 | 22,0582388451 |
| 4 | 1,4970272063 | -22,0298983855 | -1,5029462976 | 22,0807045480 |
| 5 | 1,5054154227 | -22,0520123600 | -1,5026355014 | 22,1033374113 |
| 6 | 1,5139262552 | -22,0739624485 | -1,5023193055 | 22,1258172930 |
| 7 | 1,5226504146 | -22,0967803028 | -1,5019968360 | 22,1491797599 |
| 8 | 1,5316904534 | -22,1195087286 | -1,5016605550 | 22,1724771291 |
| 9 | 1,5409666772 | -22,1431660386 | -1,5013172701 | 22,1967200395 |
| 10 | 1,5503609225 | -22,1665704295 | -1,5009686417 | 22,2207214914 |
| 11 | 1,5597037484 | -22,1894386904 | -1,5006213817 | 22,2441872222 |
| 12 | 1,5694431256 | -22,2135122969 | -1,5002609065 | 22,2688865943 |
| 13 | 1,5794846025 | -22,2379840800 | -1,4998889743 | 22,2940060903 |
| 14 | 1,5896413969 | -22,2622892049 | -1,4995121960 | 22,3189713117 |
| 15 | 1,6000743032 | -22,2869548277 | -1,4991250895 | 22,3443190379 |
| 16 | 1,6104850880 | -22,3111557781 | -1,4987383511 | 22,3692050456 |
| 17 | 1,6214383757 | -22,3366607127 | -1,4983325264 | 22,3954342267 |
| 18 | 1,6322156984 | -22,3615256193 | -1,4979334004 | 22,4210159473 |
| 19 | 1,6434550560 | -22,3870410942 | -1,4975167777 | 22,4472838775 |
| 20 | 1,6548295931 | -22,4125233394 | -1,4970950214 | 22,4735325088 |

Tabelle 7

| Punkt № | Kartesische Koordinaten | | Polarkoordinaten | |
|------------|-------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| | x_1/m | y_1/m | Winkel ζ_1 | Radius ρ_1/m |
| 21 | -1,4726235176 | -22,4521682322 | -1,6362918821 | 22,5004106262 |
| 22 | -1,4644819352 | -22,4800344477 | -1,6358502950 | 22,5276864349 |
| 23 | -1,4562039022 | -22,5078379034 | -1,6354039186 | 22,5548951869 |
| 24 | -1,4477952402 | -22,5354897647 | -1,6349532757 | 22,5819487642 |
| 25 | -1,4391277162 | -22,5636166203 | -1,6344909477 | 22,6094644689 |
| 26 | -1,4302550878 | -22,5923639240 | -1,6340189696 | 22,6375912432 |
| 27 | -1,4212527969 | -22,6210633135 | -1,6335425862 | 22,6656670968 |
| 28 | -1,4120937136 | -22,6499388627 | -1,6330600029 | 22,6939141432 |
| 29 | -1,4026243473 | -22,6795693963 | -1,6325629391 | 22,7229008505 |
| 30 | -1,3929431000 | -22,7088806295 | -1,6320587059 | 22,7515614833 |
| 31 | -1,3831795234 | -22,7385235861 | -1,6315512502 | 22,7805539983 |
| 32 | -1,3731344044 | -22,7685488491 | -1,6310317548 | 22,8099170271 |
| 33 | -1,3629585113 | -22,7985290985 | -1,6305079973 | 22,8392334582 |
| 34 | -1,3525434853 | -22,8291060295 | -1,6299736011 | 22,8691376310 |
| 35 | -1,3419780652 | -22,8597589282 | -1,6294338500 | 22,8991153406 |
| 36 | -1,3310197406 | -22,8908752316 | -1,6288772305 | 22,9295395160 |
| 37 | -1,3200170902 | -22,9218496056 | -1,6283205144 | 22,9598265338 |
| 38 | -1,3087427762 | -22,9530232491 | -1,6277529744 | 22,9903041287 |
| 39 | -1,2972316882 | -22,9848143245 | -1,6271751572 | 23,0213922165 |
| 40 | -1,2855604805 | -23,0166351021 | -1,6265918917 | 23,0525086958 |

Tabelle 8

| Punkt № | Kartesische Koordinaten | | Polarkoordinaten | |
|------------|-------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| | x_1/m | y_1/m | Winkel ζ_1 | Radius ρ_1/m |
| 41 | -4,4689675183 | -22,6471608732 | -1,7656234044 | 23,0838810925 |
| 42 | -4,4614354129 | -22,6806272714 | -1,7650234285 | 23,1152603137 |
| 43 | -4,4537362417 | -22,7147478235 | -1,7644125591 | 23,1472576172 |
| 44 | -4,4457855496 | -22,7489984311 | -1,7637916505 | 23,1793429323 |
| 45 | -4,4376739248 | -22,7833498238 | -1,7631648232 | 23,2115053165 |
| 46 | -4,4293924577 | -22,8180717448 | -1,7625295200 | 23,2440081676 |
| 47 | -4,4208806192 | -22,8528539852 | -1,7618857821 | 23,2765358402 |
| 48 | -4,4122417972 | -22,8879760604 | -1,7612357320 | 23,3093827850 |
| 49 | -4,4032654348 | -22,9235932208 | -1,7605693099 | 23,3426620727 |
| 50 | -4,3942178516 | -22,9590640322 | -1,7599029700 | 23,3757945697 |
| 51 | -4,3848870745 | -22,9951731578 | -1,7592215255 | 23,4095113835 |
| 52 | -4,3753935584 | -23,0312036436 | -1,7585358476 | 23,4431314048 |
| 53 | -4,3657038066 | -23,0677156809 | -1,7578401067 | 23,4771990762 |
| 54 | -4,3557589534 | -23,1042802783 | -1,7571353059 | 23,5112824669 |
| 55 | -4,3455907310 | -23,1415499370 | -1,7564176957 | 23,5460292255 |
| 56 | -4,3352687245 | -23,1785744703 | -1,7556977013 | 23,5805188533 |
| 57 | -4,3246681091 | -23,2160017883 | -1,7549650885 | 23,6153656184 |
| 58 | -4,3138759474 | -23,2536154131 | -1,7542252348 | 23,6503732628 |
| 59 | -4,3028206898 | -23,2913784799 | -1,7534754992 | 23,6854929732 |
| 60 | -4,2915891613 | -23,3292085213 | -1,7527201648 | 23,7206599351 |

Tabelle 9

| Punkt № | Kartesische Koordinaten | | Polarkoordinaten | |
|------------|-------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| | x_1/m | y_1/m | Winkel ζ_1 | Radius ρ_1/m |
| 81 | 2,9712700270 | -23,2202050634 | -1,4435274070 | 23,4095358511 |
| 82 | 2,9827926416 | -23,1847140379 | -1,4428457557 | 23,3757998144 |
| 83 | 2,9940844366 | -23,1497990788 | -1,4421751068 | 23,3426163702 |
| 84 | 3,0051278977 | -23,1148591246 | -1,4415129753 | 23,3093866507 |
| 85 | 3,0158997704 | -23,0803443342 | -1,4408628900 | 23,2765535681 |
| 86 | 3,0265196112 | -23,0461267032 | -1,4402191181 | 23,2440051837 |
| 87 | 3,0369040773 | -23,0120159886 | -1,4395841970 | 23,2115416600 |
| 88 | 3,0471056453 | -22,9781597002 | -1,4389567627 | 23,1793156936 |
| 89 | 3,0571350149 | -22,9444550774 | -1,4383358212 | 23,1472264709 |
| 90 | 3,0669021020 | -22,9109063717 | -1,4377252973 | 23,1152659357 |
| 91 | 3,0764669049 | -22,8779454130 | -1,4371251615 | 23,0838695832 |
| 92 | 3,0858720320 | -22,8450678723 | -1,4365307398 | 23,0525428595 |
| 93 | 3,0950134157 | -22,8124258316 | -1,4359474284 | 23,0214222055 |
| 94 | 3,1039999780 | -22,7797841880 | -1,4353692129 | 22,9902888959 |
| 95 | 3,1127962137 | -22,7478002596 | -1,4348015265 | 22,9597891306 |
| 96 | 3,1213353128 | -22,7160960049 | -1,4342451005 | 22,9295388493 |
| 97 | 3,1297199708 | -22,6844540006 | -1,4336942571 | 22,8993362437 |
| 98 | 3,1379496217 | -22,6528761270 | -1,4331490575 | 22,8691828593 |
| 99 | 3,1459339368 | -22,6215326989 | -1,4326144721 | 22,8392347066 |
| 100 | 3,1537308937 | -22,5908617435 | -1,4320906945 | 22,8099332060 |

Tabelle 10

| Punkt № | Kartesische Koordinaten | | Polarkoordinaten | |
|------------|-------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| | x_1/m | y_1/m | Winkel ζ_1 | Radius ρ_1/m |
| 101 | -0,0091372936 | -22,7805539422 | -1,5711974274 | 22,7805557747 |
| 102 | 0,0025532180 | -22,7513299085 | -1,5706841040 | 22,7513300517 |
| 103 | 0,0138678560 | -22,7229132213 | -1,5701860241 | 22,7229174531 |
| 104 | 0,0250044257 | -22,6941316628 | -1,5696945259 | 22,6941454377 |
| 105 | 0,0360395486 | -22,6656739623 | -1,5692062784 | 22,6657026146 |
| 106 | 0,0467817805 | -22,6375570782 | -1,5687297737 | 22,6376054167 |
| 107 | 0,0573959026 | -22,6093919215 | -1,5682577455 | 22,6094647736 |
| 108 | 0,0677682650 | -22,5818340500 | -1,5677953278 | 22,5819357363 |
| 109 | 0,0779987955 | -22,5543523846 | -1,5673380814 | 22,5544872543 |
| 110 | 0,0878109902 | -22,5275186713 | -1,5668984033 | 22,5276898117 |
| 111 | 0,0976408074 | -22,5002036816 | -1,5664568019 | 22,5004154393 |
| 112 | 0,1070392003 | -22,4736295541 | -1,5660334828 | 22,4738844601 |
| 113 | 0,1163822141 | -22,4473146880 | -1,5656116901 | 22,4476163884 |
| 114 | 0,1257210839 | -22,4206871478 | -1,5651890158 | 22,4210396273 |
| 115 | 0,1346534297 | -22,3946612030 | -1,5647836524 | 22,3950660178 |
| 116 | 0,1434387532 | -22,3687338827 | -1,5643839483 | 22,3691937760 |
| 117 | 0,1519213561 | -22,3437754969 | -1,5639971619 | 22,3442919681 |
| 118 | 0,1686098121 | -22,2933620911 | -1,5632332416 | 22,2939996994 |
| 119 | 0,1766989393 | -22,2682127545 | -1,5628614632 | 22,2689137997 |
| 120 | 0,1603931803 | -22,3183902922 | -1,5636098578 | 22,3189666250 |

Tabelle 11

| Punkt № | Kartesische Koordinaten | | Polarkoordinaten | |
|------------|-------------------------|----------------|------------------|-------------------|
| | x_1/m | y_1/m | Winkel ζ_1 | Radius ρ_1/m |
| 121 | -2,9129607462 | -22,0526320535 | -1,7021273187 | 22,2441884724 |
| 122 | -2,9020447328 | -22,0299178849 | -1,7017741495 | 22,2202417999 |
| 123 | -2,8914374542 | -22,0076445005 | -1,7014314223 | 22,1967751489 |
| 124 | -2,8809161533 | -21,9850236457 | -1,7010938505 | 22,1729777564 |
| 125 | -2,8705424825 | -21,9625276659 | -1,7007614317 | 22,1493258503 |
| 126 | -2,8601985368 | -21,9400792263 | -1,7004293566 | 22,1257273807 |
| 127 | -2,8503810575 | -21,9188405985 | -1,7001131346 | 22,1033989548 |
| 128 | -2,8406534619 | -21,8972545017 | -1,6998023343 | 22,0807397250 |
| 129 | -2,8308049799 | -21,8749335024 | -1,6994897362 | 22,0573382929 |
| 130 | -2,8216428385 | -21,8545238582 | -1,6991962594 | 22,0359225216 |
| 131 | -2,8126204449 | -21,8333369600 | -1,6989130186 | 22,0137556218 |
| 132 | -2,8031780492 | -21,8118957420 | -1,6986117383 | 21,9912847064 |
| 133 | -2,7946870971 | -21,7923860691 | -1,6983416152 | 21,9708526588 |
| 134 | -2,7862844707 | -21,7724999503 | -1,6980771574 | 21,9500600281 |
| 135 | -2,7775357532 | -21,7512317472 | -1,6978045263 | 21,9278541444 |
| 136 | -2,7692655450 | -21,7313678316 | -1,6975449077 | 21,9071034026 |
| 137 | -2,7617452123 | -21,7126248581 | -1,6973123228 | 21,8875607332 |
| 138 | -2,7537432718 | -21,6940645860 | -1,6970564221 | 21,8681398447 |
| 139 | -2,7458669685 | -21,6747550327 | -1,6968100812 | 21,8479928400 |
| 140 | -2,7381348591 | -21,6543696365 | -1,6965760225 | 21,8267979067 |

Tabelle 12

4. Der Fall eines Kreisevolventenprofils

Nachdem der allgemeine Fall der Synthese von Verzahnungen mit sich kreuzenden Achsen erörtert wurde, wenden wir uns dem speziellen Fall der Zahnräder mit Kreisevolventenprofil zu. Sei

$$\rho = \rho(\zeta) \quad (4.1)$$

die Gleichung in Polarkoordinaten einer Evolvente des Kreises mit Radius r und dem Pol als Mittelpunkt. In (4.1) bedeutet ζ den Polarwinkel und ρ den Polarradius des laufenden Punkts der Evolvente.

Wechseln wir jetzt vom expliziten Ausdruck (4.1) zur Parameterdarstellung

$$\begin{cases} \rho = \rho(\phi) = r\sqrt{1+\phi^2} \\ \zeta = \zeta(\phi) = \phi - \arctan \phi + \zeta_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

mit dem Wälzwinkel ϕ als Parameter, wobei ζ_0 der dem Anfangspunkt der Evolvente entsprechende Polarwinkel ist. Nehmen wir an, dass $\rho'(\zeta) > 0$ ist. Dann folgt

$$\rho'(\zeta) = \frac{\frac{d\rho}{d\phi}}{\frac{d\zeta}{d\phi}} = \frac{\frac{r\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}}{1 - \frac{1}{1+\phi^2}} = \frac{\frac{r\phi}{\sqrt{1+\phi^2}}}{\frac{\phi^2}{1+\phi^2}} = \frac{r\sqrt{1+\phi^2}}{\phi},$$

$$\arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \phi = \operatorname{arccot} \phi, \quad (4.3)$$

$$\frac{\rho(\zeta)\rho'(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}} = \frac{\frac{r^2(1+\phi^2)}{\phi}}{r(1+\phi^2)} = r, \quad (4.4)$$

$$\arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} - \zeta = \frac{\pi}{2} - \arctan \phi - \phi + \arctan \phi - \zeta_0 = \frac{\pi}{2} - \phi - \zeta_0. \quad (4.5)$$

Aus (2.11) folgt unter Berücksichtigung von (4.4) und (4.5)

$$\xi(\phi) = \frac{T}{2\pi} \left\{ \arccos \left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \right] + \frac{\pi}{2} - \phi - \zeta_0 \right\}. \quad (4.6)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) &= \arccos \left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \right] + \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} = \\ &= \arccos \left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \right] + \operatorname{arccot} \phi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} \rho(\zeta) \cos \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) \right) &= r\sqrt{1+\phi^2} \cos \left\{ \arccos \left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \right] + \operatorname{arccot} \phi \right\} = \\ &= r \frac{\sqrt{1+\phi^2}}{\sqrt{1+\phi^2}} \left\{ -\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \phi \pm \sqrt{1 - \left[\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \right]^2} \right\} = \\ &= -r \left\{ \frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \phi \mp \sqrt{1 - \left[\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \right]^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

und entsprechend

$$\rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi)\right) = -r \left\{ \frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \left[\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \right]^2} \right\} \phi. \quad (4.9)$$

Der besseren Lesbarkeit halber fassen wir (4.8), (4.9) und (4.6) zusammen und erhalten somit die Gleichungen des geometrischen Orts der potentiellen Berührungspunkte der die Verzahnung bildenden Räder

$$\begin{cases} x(\phi) = -r \left\{ \frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \phi \mp \sqrt{1 - \left[\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \right]^2} \right\} \\ y(\phi) = -r \left\{ \frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \left[\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \right]^2} \right\} \phi \\ z(\phi) = \frac{T}{2\pi} \left\{ \arccos \left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \right] + \frac{\pi}{2} - \phi - \zeta_0 \right\} \end{cases} \quad (4.10)$$

Der Parameter ϕ kommt in diesen Gleichungen nur in der ersten Potenz vor. Somit ist der geometrische Ort eine Gerade, was im Einklang mit den im vorigen Kapitel erhaltenen Ergebnissen steht. Man beachte, dass $z(\phi)$ nicht eindeutig bestimmt werden kann. Nämlich kann der Arkuskosinus in Gleichungen (4.10) nur bis auf das Vorzeichen und ein Vielfaches der Größe 2π bestimmt werden, der Winkel ζ_0 aber ist frei wählbar. So definieren die Gleichungen (4.10) mehrere Geraden (im oben angeführten Beispiel 6 Geraden). In diesen Gleichungen sind entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen zu wählen.

Die eben erst gewonnenen Gleichungen sollen auf die in Tabellen 1 ÷ 6 zusammengefassten Punkte angewendet werden. Dies wurde am Beispiel der Tabelle 1 ausgeführt.

Unter den Voraussetzungen des im vorigen Kapitel erörterten Beispiels gilt

$$\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} = \frac{2\pi r}{kT_1} \approx -0,93969262$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi r}{kT_1} \right)^2} \approx \pm 0,34202015$$

$$\arccos 0,93969262 \approx 0,34906585$$

Der in [1] errechnete Wert des Radius des Grundkreises ist $r \approx 21,143084m$. Man beachte noch die Bedingung $\rho'(\zeta) > 0$, die aussagt, dass der Grundkreis im Gegenuhrzeigersinn abgewickelt sein soll.

Um den der Zahnflanke entsprechenden Winkel ζ_0 zu ermitteln, deren Punkte Koordinaten in Tabelle 1 enthalten sind, verwenden wir wieder Ergebnisse aus [1]. Teilt man nämlich die dem Punkt 1 entsprechende Bogenlänge durch die Hälfte der einem Zahn entsprechenden Bogenlänge, so erhält man

$$\frac{66,31002979}{3,1977258} \approx 20,736622$$

Die betreffende Zahnflanke ist eine „ungerade“ Zahnflanke, die bei der Entwicklung des Grundkreises im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Dieser Zahnflanke gehen 10 Zähne voran. So erhält man für den zu ermittelnden Winkel im Bogenmaß

$$10 \times \frac{2\pi}{45} + 0,02000221 \approx 1,4162656,$$

wobei der letzte Summand nichts anderes als der Winkelabstand des Anfangspunkts der Evolvente von der Symmetrieachse der Zahnücke ist.

Substituiert man die soeben gewonnenen Ausdrücke in (4.10), so entstehen die Gleichungen

$$\begin{cases} x(\phi) \approx 19,868 \phi - 7,2313608 \\ y(\phi) \approx 19,868 + 7,2313608 \phi \\ z(\phi) \approx -22,5 \phi + 11,330923 \end{cases} \quad (4.11)$$

einer den geometrischen Ort der eventuellen Berührungspunkte bildenden Geraden (Tabelle 1). Man sieht, dass $x(\phi)$ und $y(\phi)$ monoton steigende, $z(\phi)$ aber eine monoton fallende Funktion des Parameters ϕ sind, was im Einklang mit der Tabelle steht. Die errechneten Abweichungen der in Tabelle 1 zusammengefassten Punkte von der Geraden (4.11) stimmen gut mit den im vorigen Kapitel erwähnten Abweichungen überein. Letztere wurden für eine gewissermaßen willkürlich gewählte Gerade errechnet.

Nochmals soll betont werden, dass obwohl die Gerade (4.10) den geometrischen Ort der eventuellen Berührungspunkte explizit definiert, dies jedoch nur für eine und zwar „ungerade“ Zahnflanke gilt. Im Vergleich mit der Verwendung von Fourierentwicklungen ist das ein bedeutender Nachteil.

Für den Fall eines gegebenen Kreisevolventenprofils entwickeln wir den expliziten Ausdruck für die Determinante (2.18).

Da diese Arbeit relativ aufwendig ist, wird sie schrittweise ausgeführt.

Wir ermitteln zunächst den Ausdruck für die zum ersten Element der dritten Zeile der Determinante gehörende Unterdeterminante. Man sieht, dass die Gleichung

$$\Delta_{31} = -\frac{2\pi}{T} \rho(\zeta) \sin \left[\arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] = -\frac{2\pi}{T} \frac{\rho(\zeta) \rho'(\zeta)}{\sqrt{[\rho(\zeta)]^2 + [\rho'(\zeta)]^2}}$$

gilt.

Im Fall einer Kreisevolvente folgt hieraus unter der Voraussetzung $\rho'(\zeta) > 0$

$$A_{31} = -\frac{2\pi r}{T}, \quad (4.12)$$

wobei r der Radius des Grundkreises der Evolvente ist.

Wir führen jetzt die Bezeichnung $\beta = \arctan \frac{T_1}{2\pi L}$ ein. Somit kann die erste Spalte der Determinante als

$$\begin{pmatrix} -\rho(\zeta) \sin \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) \right) \cos \alpha + \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \cos(\alpha + \beta) \\ \rho(\zeta) \cos \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) \right) \cos \alpha + (\xi(\phi) - t) \sin \alpha \\ -\rho(\zeta) \sin \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) \right) \sin \alpha + \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

umgeschrieben werden.

Dies führt zum Produkt

$$\tau_{1z} A_{31} = \frac{2\pi r}{T} \left[\rho(\zeta) \sin \left(\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) \right) \sin \alpha - \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \sin(\alpha + \beta) \right]. \quad (4.14)$$

Wir benötigen noch die zum zweiten Element der dritten Zeile der Determinante gehörende Unterdeterminante. Die notwendigen Umformungen führen wir wieder in zwei Schritten aus. Wir stellen zunächst unter Berücksichtigung von (4.7) fest, dass für ein Kreisevolventen-Ausgangsprofil die Beziehung

$$\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} = \arccos \left[-\frac{2\pi r (T - k T_1 \cos \alpha)}{k T T_1 \sin \alpha} \right] \quad (4.15)$$

gilt und folglich

$$\cos \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] = -\frac{2\pi r (T - k T_1 \cos \alpha)}{k T T_1 \sin \alpha} \quad (4.16 a)$$

$$\sin \left[\zeta + \frac{2\pi}{T} \xi(\phi) - \arctan \frac{\rho'(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right] = \pm \sqrt{1 - \left[\frac{2\pi r (T - k T_1 \cos \alpha)}{k T T_1 \sin \alpha} \right]^2}. \quad (4.16 b)$$

Letztere Formeln sind nur dann sinnvoll, wenn die Bedingung

$$\left| \frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \right| \leq 1 \quad (4.17)$$

erfüllt ist.

Als nächsten Schritt führen wir (unter Berücksichtigung von (4.7)) die folgende Umformung aus

$$\begin{aligned} & -\rho(\zeta) \sin\left(\zeta + \frac{2\pi}{T}\xi(\phi)\right) \cos \alpha \cos\left\{\arccos\left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha}\right]\right\} + \\ & \rho(\zeta) \cos\left(\zeta + \frac{2\pi}{T}\xi(\phi)\right) \cos \alpha \sin\left\{\arccos\left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha}\right]\right\} = \\ & = \rho(\zeta) \cos \alpha \sin\left\{\arccos\left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha}\right] - \zeta - \frac{2\pi}{T}\xi(\phi)\right\} = \\ & = -\rho(\zeta) \cos \alpha \sin(\operatorname{arccot} \phi) = -r\sqrt{1+\phi^2} \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} \cos \alpha = -r \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der Ausdruck für die gesuchte Unterdeterminante ist somit

$$\begin{aligned} \Delta_{32} = & -r \cos \alpha - \frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \cos(\alpha + \beta) \pm \sqrt{1 - \left[\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha}\right]^2} \times \\ & [\xi(\phi) - t] \sin \alpha. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir jetzt

$$\arccos\left[-\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha}\right] = \omega = \text{const}$$

und ersetzen $\xi(\phi)$ durch den rechten Teil der Gleichung (4.6), so ergibt sich

$$\Delta_{32} = -r \cos \alpha + \cos \omega \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \cos(\alpha + \beta) + \left[\frac{T}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \omega - \phi - \zeta_0\right) - t\right] \sin \omega \cdot \sin \alpha.$$

Es gilt außerdem

$$\tau_{12} \Delta_{31} = \frac{2\pi r}{T} \left[r(\phi \sin \omega + \cos \omega) \sin \alpha - \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \sin(\alpha + \beta) \right].$$

So ist die Determinante

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{2\pi r}{T} \left[r(\phi \sin \omega + \cos \omega) \sin \alpha - \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \sin(\alpha + \beta) \right] + \\ & r \cos \alpha - \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \cos \omega \cdot \cos(\alpha + \beta) - \left[\frac{T}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \omega - \phi - \zeta_0\right) - t\right] \sin \omega \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nochmals sei darauf hingewiesen, dass diese Beziehung nur für den Fall eines Kreisevolventenprofils im Stirnschnitt des Zahnrads gilt. Es ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{4\pi^2 r^2 + T^2}{2\pi T} \phi + t \right) \sin \alpha \cdot \sin \omega - \\
 & \sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \left[\frac{2\pi r}{T} \sin(\alpha + \beta) + \cos \omega \cdot \cos(\alpha + \beta) \right] + \\
 & \frac{2\pi r^2}{T} \cos \omega + r \cos \alpha - \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \omega - \zeta_0 \right) \sin \omega \cdot \sin \alpha = 0.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Da

$$\frac{4\pi^2 r^2 + T^2}{2\pi T} \neq 0$$

gilt, folgt aus (4.20), dass ϕ bei $\sin \omega \neq 0$ eine lineare Funktion des Parameters t darstellt. Dies bedeutet wiederum, dass die Momentangeschwindigkeiten der Verschiebungen des momentanen Berührungspunktes entlang die Gerade (4.10) und des Koordinatensystems $O_1 x_1 y_1 z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem $Oxyz$ in konstantem Verhältnis bleiben. Dasselbe gilt für die Momentangeschwindigkeiten der Verschiebungen des Koordinatensystems $O_1 x_1 y_1 z_1$ gegenüber dem Koordinatensystem $Oxyz$ und der Verschiebung der zu ermittelnden Schraubenfläche entlang die Achse $O_1 z_1$. So bewegt sich der momentane Berührungspunkt relativ zur zu ermittelnden Schraubenfläche geradlinig. Es gibt folglich eine Gerade, die zur zu ermittelnden Schraubenfläche gehört. Versetzt man diese Gerade in eine Schraubung mit jeweils Rechts- oder Linkswindung und dem Schraubengang T_1 um die Achse $O_1 z_1$, so erhält man die zu ermittelnde Schraubenfläche.

Wir kommen zum Schluss, dass ein zu einem Kreisevolventenprofil konjugiertes Profil immer die Laufbahn des Schnittpunktes einer in Schraubung versetzten Geraden mit einer der Achse dieser Schraubung orthogonalen Ebene darstellt. Es handelt sich um die Untersuchung der Kurven, die als Schnittgebilde solcher Art erzeugt worden sind.

Ist ρ der Abstand der in Schraubung versetzten Geraden von der Achse $O_1 z_1$, die die Achse der Schraubung sein soll, so ist ρ auch der Abstand der Projektion der betrachteten Geraden auf die Ebene $O_1 x_1 y_1$ vom Punkt O_1 . Sei ϕ der Winkel der Umdrehung der in Schraubung versetzten Geraden um die Achse $O_1 z_1$, h die entsprechende Verschiebung derselben Geraden längs derselben Achse. Da es sich um eine Schraubung handelt, muss die Gleichung

$$h = v \phi$$

mit konstantem Faktor v gelten.

Da die in Schraubung versetzte Gerade einen konstanten Winkel mit der Achse $O_1 z_1$ bildet, ist auch der Abstand des der Achse am nächsten liegenden Punktes dieser Geraden vom Schnittpunkt der Geraden und der Ebene $O_1 x_1 y_1$ dem Winkel ϕ proportional. Dasselbe gilt für die Länge der Projektion der entsprechenden Strecke auf die Ebene $O_1 x_1 y_1$. Somit sind die Gleichungen der Laufbahn des erwähnten Schnittpunktes

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \phi + w \phi \sin \phi \\ y_1 = \rho \sin \phi - w \phi \cos \phi \end{cases}, \tag{4.21}$$

wobei w ein konstanter Faktor ist. Wenn $w = \rho$ gilt, stellen (4.21) nichts anderes als die Gleichungen einer gewöhnlichen Kreisevolvente dar. Falls $w \neq \rho$ gilt, stellen die Gleichungen (4.21) entweder eine verlängerte oder verkürzte Kreisevolvente dar.

Es ist somit festgestellt, dass falls $\sin \omega \neq 0$ bzw. $\left| \frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kT T_1 \sin \alpha} \right| < 1$ gilt, das zu einem

Kreisevolventenprofil konjugierte Profil ebenfalls eine möglicherweise verlängerte oder verkürzte Kreisevolvente ist.

Es stellt sich die Frage, ob bei denselben Voraussetzungen die Klasse aller Kreisevolventen (sowohl gewöhnliche als auch verlängerte oder verkürzte) der Operation der Zuordnung eines konjugierten Profils gegenüber abgeschlossen ist. Diese Frage muss offen bleiben. Das ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass der Aufbau von verlängerten bzw. verkürzten Kreisevolventen komplizierter als der einer gewöhnlichen Kreisevolvente sein kann.

Wenn $\sin \omega = 0$, d.h.

$$\frac{2\pi r(T - kT_1 \cos \alpha)}{kTT_1 \sin \alpha} = \pm 1 \quad (4.22)$$

gilt, wird (4.10) zu

$$\begin{cases} x(\phi) = \pm r \phi \\ y(\phi) = \pm r \\ z(\phi) = \frac{T}{2\pi} \left(\left(1 \pm \frac{1}{2} \right) \pi - \phi - \zeta_0 \right) \end{cases} \quad (4.23)$$

Das heißt, dass der geometrische Ort der eventuellen Berührungspunkte eine Gerade darstellt deren Abstand von der Ebene Oxz konstant und zwar dem Radius des Grundzylinders der Evolvente gleich ist. Für den Anstieg dieser Geraden gilt $\pm \frac{T}{2\pi r}$, was dem Anstieg der gegebenen Schraubenfläche auf dem der Evolvente

(4.2) entsprechenden Grundzylinder gleich ist. Die gegenseitige Anordnung der Geraden (4.23) und der Achse O_1z_1 ist von der Verschiebung der letzteren unabhängig. Deshalb sind natürlich auch die potentiellen Berührungspunkte von dieser Verschiebung unabhängig. Die Berührung der gegebenen Schraubenfläche mit der zu ermittelnden kann somit in allen Punkten der Geraden (4.23) stattfinden, insofern die Verzahnung durchdringungsfrei bleibt.

Aus (4.20) und (4.22) folgt zwangsläufig

$$-\sqrt{\frac{T_1^2}{4\pi^2} + L^2} \left[\frac{2\pi r}{T} \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right] + \frac{2\pi r^2}{T} + r \cos \alpha = 0. \quad (4.24)$$

Die umgekehrte Behauptung gilt nicht, denn (4.24) hat (4.22) i. allg. nicht zur Folge.

Nochmals ist zu betonen, dass alles in diesem Kapitel dargelegte nur für den Fall einer Kreisevolvente als Ausgangsprofil gilt.

Löst man Gleichung (4.20) nach ϕ auf, so erhält man eine explizite Lösung des Problems der geometrischen Synthese einer Verzahnung im Falle einer Kreisevolvente als Ausgangsprofil. Obwohl dies die soeben durchgeführte theoretische Untersuchung ermöglicht, ist dieses Verfahren kaum für praktische Anwendungen empfehlenswert, da es nur für die betreffende Zahnflanke gilt.

Im Gegensatz dazu macht die Verwendung von Fourierreihenentwicklungen das ganze Zahnrad gleichzeitig überschaubar. So können für jede zulässige gegenseitige Anordnung der mit den Zahnrädern verbundenen Koordinatensysteme alle eventuellen Berührungspunkte in einheitlicher Weise ermittelt werden, sowie die Verzahnung auf Durchdringungen überprüft werden. Das zeigt das im Kapitel 3 angeführte numerische Beispiel.

5. Anhang

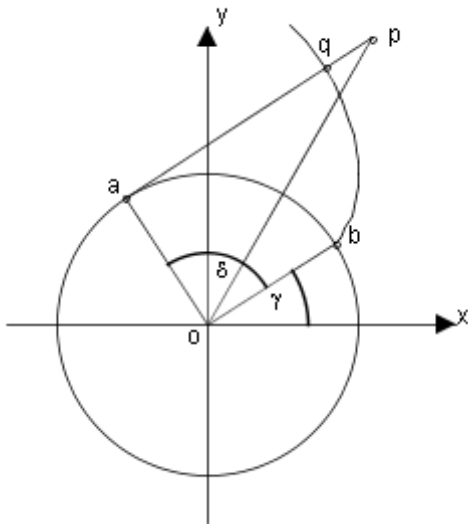


Abbildung 4

Wir zeigen jetzt, wie für eine Punktmenge eine an diese Punktmenge angenäherte Kreisevolvente ermittelt werden kann, deren Grundkreis-Mittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems übereinstimmt. Um das Verfahren zu erklären, wenden wir uns der Abbildung 4 zu, die einen Kreis mit einem Fragment seiner Evolvente darstellt.

Seien x und y die kartesischen Koordinaten des Punktes p und pa eine durch den Punkt p verlaufende Tangente an den betrachteten Kreis. pa stellt im Schnittpunkt q eine Normale an die Kreisevolvente dar. Daraus folgt $qa = r \cdot \delta$, wobei r der Radius des Grundkreises und δ der dem Punkt q entsprechende Wälzwinkel sind. Es gilt

$$pa = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2}. \tag{5.1}$$

Hieraus ergibt sich, dass für die Abweichung des Punktes p von der Kreisevolvente die Gleichung

$$pq = pa - qa = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} - r \cdot \delta \tag{5.2}$$

gilt.

Um die Formel (5.2) der Anwendung zugänglich zu machen, ist ein expliziter Ausdruck für die Größe des Wälzwinkels δ notwendig. Aus Abbildung 4 ist ersichtlich, dass, wenn der Grundkreis im Gegenuhrzeigersinn abgewickelt wird, die Formel

$$\delta = \arccos \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \arctan \frac{y}{x} - \gamma \tag{5.3 a}$$

gilt. Hier ist γ ein dem Anfangspunkt der Evolvente entsprechender Polarwinkel. Wird der Grundkreis im Uhrzeigersinn abgewickelt, gilt die Formel

$$\delta = \arccos \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \arctan \frac{y}{x} + \gamma. \tag{5.3 b}$$

Wir verfügen jetzt über den expliziten Ausdruck

$$pq = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} - \left(\arccos \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm \arctan \frac{y}{x} \mp \gamma \right) r \tag{5.4}$$

für die Abweichung des Punktes p von der Kreisevolvente. Die oberen Vorzeichen gelten für den Fall der Abwicklung im Gegenuhrzeigersinn. Entsprechend gelten die unteren Vorzeichen für den Uhrzeigersinn.

Nehmen wir an, dass in der Ebene Oxy n Punkte $p_i(x_i, y_i)$, $i = 1 \dots n$ gegeben sind. Bilden wir die Summe der Quadrate der Abweichungen dieser Punkte von der betrachteten Kreisevolvente, so entsteht der Ausdruck

$$S(r, \gamma) = \sum_{i=1}^n \left[\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - r^2} - \left(\arccos \frac{r}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \pm \arctan \frac{y_i}{x_i} \mp \gamma \right) r \right]^2, \tag{5.5}$$

der als eine Funktion des Radius r des Grundkreises und des Winkels γ angesehen werden kann.

Wir wollen die dem Tiefpunkt dieser Funktion entsprechenden Werte dieser zwei Veränderlichen ermitteln. Dafür benötigen wir die partiellen Ableitungen der Funktion $S(r, \gamma)$:

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = \pm 2r \sum_{i=1}^n \left[\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - r^2} - \left(\arccos \frac{r}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \pm \arctan \frac{y_i}{x_i} \mp \gamma \right) r \right], \tag{5.6 a}$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -2 \sum_{i=1}^n \left[\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - r^2} - \left(\arccos \frac{r}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \pm \arctan \frac{y_i}{x_i} \mp \gamma \right) r \right] \times \left(\arccos \frac{r}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \pm \arctan \frac{y_i}{x_i} \mp \gamma \right). \quad (5.6 \text{ b})$$

Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0.$$

Da $r \neq 0$ gelten soll, kann die Gleichung (5.6a) mit r gekürzt werden. Somit kann γ eliminiert werden:

$$\gamma = \mp \frac{\sum_{i=1}^n \left[\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - r^2} - \left(\arccos \frac{r}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \pm \arctan \frac{y_i}{x_i} \right) r \right]}{nr}. \quad (5.7)$$

Substituiert man den rechten Teil der Formel (5.7) für γ in Gleichung $\frac{\partial S}{\partial r} = 0$, so erhält man eine Gleichung bezüglich r , die mittels eines beliebigen Näherungsverfahrens gelöst werden kann. Man beachte, dass bei der Substitution entweder nur die oberen (für Abwicklung im Gegenuhrzeigersinn) oder nur die unteren (für Abwicklung im Uhrzeigersinn) Vorzeichen verwendet werden. Nachdem r , ermittelt ist, erhält man aus (5.7) den Winkel γ .

6. Literaturverzeichnis

- [1] Isajs Kans-Kagans, Jürgen Zech: *Beitrag zur geometrischen Synthese von Verzahnungen*. Schriftenreihe der Georg-Simon-Ohm-Hochschule Nürnberg Nr. 46, Nürnberg 2010.
- [2] K.-H. Grote, J. Feldhusen: *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*, Springer 2007.
- [3] Gino Loria: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, Teubner 1911.
- [4] Frank Sperling: *Über die analytische Behandlung des allgemeinen Verzahnungsproblems bei beliebiger Lage der Drehachsen*. Dissertation, Berlin, 1959.
- [5] Ulrich Häussler: *Generalisierte Berechnung räumlicher Verzahnungen und ihre Anwendung auf Wälzfräserherstellung und Wälzfräsen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [6] Faydor L. Litvin: *Theory of Gearing*, United States Government Printing, 1989.
- [7] David B. Dooner, Ali A. Seireg: *The kinematic geometry of gearing*, Wiley, 1995.
- [8] Gerhard Brandner: *Räumliche Verzahnungen*. Dissertation, Karl-Marx-Stadt, 1981.
- [9] A. Dyson: *A general theory of the kinematics and geometry of gears in three dimensions*, Clarendon Press, Oxford, 1969.
- [10] Wu Da-ren, Luo Jia-shun *A geometric theory of conjugate tooth surfaces*, World Scientific Singapore, 1992.
- [11] Karl-Heinz Hirschmann: *Beitrag zur Berechnung der Geometrie von evolventen Verzahnungen*. Dissertation, Stuttgart, 1977.
- [12] Ralf Steffens: *Die Profilsteigungsfunktion ein neuer Weg zur analytischen Bestimmung und Optimierung allgemeiner Profilflankenpaarungen*. Dissertation, Stuttgart, 1993.
- [13] Josef Hoschek: *Zur Ermittlung von Hüllgebilden in der Kinematik*. Dissertation, Darmstadt, 1964.
- [14] Jack Phillips *General Spatial Involute Gearing*, Springer, 2003.